

# THÈSE

présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS**

par

**Zhong Ping JIANG**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS**

Spécialité :

**MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE**

Sujet de la thèse :

**QUELQUES RESULTATS DE STABILISATION ROBUSTE.  
APPLICATIONS A LA COMMANDE**

soutenue le 28 SEPTEMBRE 1993 devant le jury composé de :

MM.	<b>Guy BORNARD</b>	Président et Rapporteur
	<b>Andrea BACCIOTTI</b>	Rapporteur
	<b>Rogelio LOZANO</b>	Rapporteur
	<b>Dirk AEYELS</b>	Examineur
	<b>André BELLAICHE</b>	Examineur
	<b>Laurent PRALY</b>	Examineur
	<b>Claude SAMSON</b>	Examineur

Ceci n'est pas une version officielle mais une reconstitution à partir de fichiers sauvegardés



# REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer mes remerciements à Monsieur Guy Bornard pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury de thèse et la lourde charge de rapporteur. Je lui suis reconnaissant de ses remarques constructives.

Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Laurent Praly, mon directeur de thèse, qui a toujours suivi de très près mon travail. La disponibilité, les efforts inlassables et les moyens qu'il m'a accordés ont énormément contribué à l'achèvement de ce travail. Il m'a fait partager non seulement ses solides connaissances et ses expériences mais aussi sa passion de la recherche. Pour toutes ces raisons, je lui adresse ma plus profonde gratitude.

Mes remerciements vont aussi à Messieurs Andrea Bacciotti et Rogelio Lozano qui ont également accepté la tâche de rapporteur de cette thèse. Je les remercie pour les nombreux échanges de vue que nous avons eus.

Que Messieurs Dirk Aeyels, André Bellaïche et Claude Samson se trouvent ici eux aussi remerciés pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux. Je les remercie infiniment de m'avoir honoré de leur présence dans mon jury de thèse.

J'exprime ma très vive reconnaissance envers Monsieur Jean-Michel Coron pour sa gentillesse et ses conseils fructueux.

Pour leur soutien et leur amitié, je tiens à témoigner toute ma sympathie à Messieurs Georges Bastin, Romeo Ortega et Jean-Baptiste Pomet.

Je remercie très amicalement pour sa coopération Monsieur Andrew Teel avec qui je travaille sur les systèmes ISS.

Je n'oublie pas d'associer à ces remerciements tous les membres du C.A.S., notamment Madame Brigitte d'Andréa-Novel et Monsieur Jean Lévine pour avoir réussi à me communiquer leurs avis judicieux en nonlinéaire, Monsieur Pierre Carpentier pour m'avoir beaucoup aidé en informatique, ainsi que Messieurs Philippe Martin, Frédéric Mazenc et Benoît Thuillot pour leur lecture attentive du manuscrit de cette thèse. Je dis merci encore à Madame Le Gallic pour sa gentillesse et sa bonne humeur.

Enfin, c'est avec un très grand plaisir que je dédie cet ouvrage à mes parents.



# Résumé

Nous étudions le problème de la robustesse de la bornitude et de la stabilité pour les systèmes non-linéaires.

La première partie est consacrée à l'énoncé des conditions suffisantes garantissant que les propriétés de bornitude ou de stabilité pour le système réel peuvent se déduire de celles du modèle.

La première condition que nous proposons est fondée sur la technique de fonctions de gain. Elle repose sur la notion SpES qui est une généralisation naturelle de la stabilité entrée-à-état (ISS) introduite par E.D. Sontag. Pour un système décomposé en sous systèmes interconnectés, la notion SpES permet d'énoncer un *Théorème du petit gain généralisé* dont la conclusion porte sur la stabilité entrée-sortie et sur la stabilité au sens de Lyapunov des variables internes. Ce théorème généralise le théorème du petit gain monotone donné récemment par Mareels-Hill. La seconde condition repose sur la technique de Lyapunov. Cette condition dite GUEC quantifie une sorte de distance et nous permet de prendre en compte potentiellement une large classe de perturbations. Cette partie est terminée par une comparaison des caractérisations nouvelles proposées avec trois caractérisations plus classiques : stabilité totale, perturbations singulières et perturbations régulières.

La seconde partie s'intéresse à la synthèse de commande pour satisfaire les conditions énoncées dans la première partie.

Nous montrons d'abord que pour une certaine classe de systèmes non-linéaires, nous pouvons élaborer des lois de commande pour satisfaire les conditions du théorème du petit gain généralisé. En particulier, des problèmes de stabilisation globale par retour d'état partiel et par retour de sortie sont résolus. Nous donnons ensuite une application du théorème du petit gain à une classe de systèmes soumis à des perturbations paramétriques et dynamiques et concevons des contrôleurs adaptatifs assurant la bornitude des solutions. Enfin, pour examiner l'aspect de convergence asymptotique des solutions, nous introduisons un signal de normalisation dynamique qui informe de la "taille" des effets non-modélisés.

## Mots-clefs :

Système non-linéaire, Bornitude, Stabilité, Stabilité entrée-à-sortie, Petit-gain, Robustesse, Retour de sortie, Retour d'état-partiel, Commande adaptative.



# Abstract

We study the problem of robustness of the boundedness and the stability properties for nonlinear systems.

The first part is devoted to the formulation of sufficient conditions guaranteeing that the properties of boundedness or stability of the actual system can be obtained from those of the model.

The first condition we propose is based on the technique of gain functions. It is related to the notion SpES which is a natural generalization of the input-to-state stability (ISS) introduced by E.D. Sontag. For a system composed of interconnected subsystems, the notion SpES allows us to state a *generalized small-gain theorem* which contains a result on input-output stability and another one on stability in the Lyapunov sense of the internal variables. This theorem generalizes the small monotone gain theorem recently found by Mareels-Hill. The second condition is built on Lyapunov techniques. This condition called GUEC quantifies a kind of distance and permits us to take into account potentially a large class of perturbations. This part is closed by a comparison of these two new characterizations with three more classic characterizations : total stability, singular perturbations and regular perturbations.

The second part is concerned with the control design to satisfy the conditions stated in the first part.

We start by showing that, for a class of nonlinear systems, we can elaborate control laws to fulfill the conditions of the generalized small-gain theorem. In particular, some problems of global stabilization by output feedback and by partial-state feedback are solved. Then we give an application of the small-gain theorem to a class of systems subject to parametric and dynamic uncertainties. We design adaptive controllers which guarantee the boundedness of the solutions. Finally, for the purpose of getting asymptotic convergence of the solutions, we introduce a dynamic normalizing signal which informs about the size of the unmodelled effects.

## Keywords :

Nonlinear system, Boundedness, Stability, Input-to-output stability, Small-gain, Robustness, Output feedback, Partial-state feedback, Adaptive control.





# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Caractérisation des Effets Non Modélisés et Théorèmes Correspondants</b>	<b>7</b>
1.0 Introduction . . . . .	7
1.1 Caractérisations classiques . . . . .	8
1.1.1 Théorie de la stabilité totale . . . . .	10
1.1.2 Théorie des perturbations singulières . . . . .	11
1.1.3 Théorie des perturbations régulières . . . . .	15
1.2 Caractérisations plus récentes: cas global . . . . .	17
1.2.1 SpES et le théorème du petit-gain généralisé . . . . .	18
1.2.2 GUEC . . . . .	22
1.2.3 Exemples illustratifs . . . . .	28
1.3 Caractérisations plus récentes: cas local . . . . .	36
1.3.1 LISS et le théorème du petit gain local . . . . .	37
1.3.2 LUEC . . . . .	39
1.3.3 Exemple . . . . .	40
1.4 Discussions de nos hypothèses de caractérisation . . . . .	42
1.4.1 Comparaison avec la stabilité totale . . . . .	42
1.4.2 Comparaison avec les perturbations régulières . . . . .	43
1.4.3 Comparaison avec les perturbations singulières . . . . .	46
1.5 Résumé . . . . .	48
<b>2 Application du Théorème du Petit Gain Généralisé</b>	<b>51</b>
2.0 Introduction . . . . .	51
2.1 Les outils . . . . .	52
2.2 Stabilisation globale par retour d'état partiel . . . . .	54
2.2.1 Ajout d'une dynamique ISS . . . . .	54
2.2.2 Ajout d'une multidynamique ISS . . . . .	58
2.3 Stabilisation globale par retour de sortie . . . . .	63
2.3.1 Résultat principal: stabilisation globale . . . . .	63
2.3.2 Exemple . . . . .	65
2.3.3 Quelques généralisations . . . . .	67
2.4 Stabilisation adaptative de systèmes nonlinéaires avec dynamiques incertaines . .	73
2.4.1 Description de systèmes . . . . .	74
2.4.2 Solutions bornées: résultat global . . . . .	75
2.5 Résumé . . . . .	81

<b>3</b>	<b>Application de la Caractérisation des Effets Non Modélisés GUEC</b>	<b>83</b>
3.0	Généralités . . . . .	83
3.1	Effets non-modélisés . . . . .	84
3.1.1	Hypothèses . . . . .	84
3.1.2	Exemple illustratif . . . . .	89
3.2	Bornitude robuste . . . . .	95
3.2.1	$p^*$ donné et constant . . . . .	95
3.2.2	$p^*$ inconnu et dépend du temps, $V$ ne dépend pas de $p$ . . . . .	96
3.2.3	$p^*$ inconnu mais constant, $V$ dépend de $p$ . . . . .	98
3.3	Discussions . . . . .	100
3.4	Résumé . . . . .	101
	<b>Conclusions</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Notions et Théorèmes de Stabilité</b>	<b>105</b>
<b>B</b>	<b>Démonstrations liées au Chapitre 1</b>	<b>111</b>
B.0	Deux inégalités utiles . . . . .	111
B.1	Démonstration du théorème 1.9 . . . . .	112
B.2	Démonstration du théorème 1.10 . . . . .	119
B.3	Démonstration du théorème 1.14 . . . . .	124
B.4	Démonstration de la proposition 1.1 . . . . .	126
B.5	Démonstration de la proposition 1.2 . . . . .	127
B.6	Démonstration de la proposition 1.5 . . . . .	129
<b>C</b>	<b>Démonstrations liées au Chapitre 2</b>	<b>131</b>
C.0	Quatres lemmes techniques . . . . .	131
C.1	Démonstration de la proposition 2.1 . . . . .	134
C.2	Démonstration de la proposition 2.2 . . . . .	137
C.3	Démonstration de la proposition 2.3 . . . . .	143
C.4	Démonstration du théorème 2.1 . . . . .	144
C.5	Démonstration de la proposition 2.4 . . . . .	150
<b>D</b>	<b>Démonstrations liées au Chapitre 3</b>	<b>153</b>
D.1	Démonstration du corollaire 3.2 . . . . .	153
D.2	Démonstration de la proposition 3.1 . . . . .	156
D.3	Démonstration de la proposition 3.2 . . . . .	157
	<b>Bibliographie</b>	<b>159</b>

# Introduction

L’objet de ce mémoire est la synthèse de loi de commande en vue de stabiliser un équilibre ou de réguler une sortie. Pour établir ces propriétés nous cherchons à nous placer dans un contexte aussi réaliste que possible. Nous appelons **processus de simulation** une idéalisation du processus réel telle qu’on puisse le décrire comme le système dynamique instationnaire suivant :

$$\dot{X} = F(X, t, u), \quad X \in \Omega, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (0.1)$$

où  $X$  est l’état,  $u$  est l’entrée et  $F$  est le champ de vecteurs défini sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . La description parfaite d’un système réel par un tel processus de simulation est irréaliste ou même impossible. Mais n’ayant, d’un point de vue théorique, accès à aucune autre donnée, ce processus de simulation est considéré comme décrivant la réalité. Le prix que nous devons payer pour le réalisme de ce système (0.1) est sa complexité. Celle-ci est en général telle qu’on ne peut pas utiliser le processus de simulation pour la conception de lois de commande. Nous devons alors introduire un **processus de synthèse** simplifié, i.e. le système dynamique *stationnaire* suivant :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (0.2)$$

où  $x$  est l’état du modèle dont la dimension  $n$  est bien sûr en général (beaucoup) plus petite que  $N$ .

Comment synthétiser une loi de commande qui “tolère” les erreurs de modélisation entre (0.1) et (0.2) et plus précisément telle qu’on puisse garantir de bonnes propriétés pour le processus réel à partir de celles obtenues pour le processus de simulation (0.1) ou pour le processus de synthèse (0.2) est le problème de base en automatique. La littérature est extrêmement riche même dans le contexte de processus nonlinéaires (voir, par exemple, [20], [40], [43], [75]). Dans cette thèse, nous proposons des techniques nouvelles pour la synthèse de telles commandes.

Notre étude commence par des caractérisations des effets non-modélisés pour lesquelles les propriétés de **bornitude** et/ou **stabilité** des solutions d’un modèle sont robustes. En second lieu, nous montrons pour quelques systèmes particuliers comment obtenir des lois de commande telles que ces caractérisations soient satisfaites.

Au Chapitre 1, on se pose le problème de caractérisation des effets non-modélisés par le système dynamique décrivant le processus de synthèse. Après un bref rappel de trois caractérisations classiques : stabilité totale, perturbations singulières et perturbations régulières, nous présentons deux caractérisations plus nouvelles appelées ici SpES et GUEC. La première consiste à décomposer un système en deux sous-systèmes. Ceci se traduit par une considération très classique d’un système de simulation comme un système interconnecté composé d’un modèle et d’une dynamique incertaine. Cette façon de caractériser les effets non-modélisés motive un théorème du petit gain généralisé qui permettra de décrire le comportement entrée-sortie du système de simulation; de plus, la stabilité des variables internes pourra aussi être obtenue. La

seconde caractérisation GUEC nécessite la connaissance d'une fonction de Lyapunov du modèle de synthèse choisi. En introduisant un signal de comparaison qui mémorise les états passés du modèle, on cherche à recouvrir une classe d'effets non-modélisés la plus large possible.

Les Chapitres 2 et 3 étudient les possibilités que nous avons pour satisfaire les hypothèses posées dans le Chapitre 1 avec un choix approprié d'une loi de commande. Dans le Chapitre 2, nous étudions le problème de **stabilisation globale** par retour d'état partiel et par retour de sortie d'une classe de systèmes rétroactifs récurrents perturbés. L'objectif est d'établir des ingrédients de synthèse à l'aide du théorème du petit gain, puis de montrer comment les utiliser de façon systématique pour la construction d'une commande robuste.

La **commande adaptative** est une approche particulière dans le domaine de la commande robuste. Dans ce cas la forme du modèle de synthèse (0.2) est complètement *connue*, mais à des paramètres *inconnus* près. La Section 2.4 et le Chapitre 3 sont dédiés à cette approche. La Section 2.4 est une première tentative d'utilisation du théorème du petit gain pour l'étude d'un système nonlinéaire soumis à des incertitudes dynamiques et paramétriques. Elle nous permettra d'établir un résultat de bornitude des solutions.

Pour examiner les aspects de convergence asymptotique, dans le Chapitre 3, nous proposons l'utilisation d'un **signal de comparaison dynamique** dans la commande. Un tel signal permet de prendre en compte des informations sur la "taille" des effets non-modélisés. L'idée d'utiliser un tel signal de normalisation dynamique dans la commande adaptative linéaire est due à L. Praly [61, 62]. Son intérêt est justifié par les très nombreuses publications sur le sujet.

Tout au long de ce mémoire, nous utilisons les mots "local" et "global" dans les sens suivants :

**Local** = "... Etant donné un système ... il existe un voisinage ouvert ... "

**Global** = "... Etant donné un voisinage ouvert difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  ... il existe ..."

Plus précisément, quand nous parlons du cas global, il est sous-entendu que, un ouvert difféomorphe à  $\mathbb{R}^n$  étant fixé *a priori*, nous voulons que tous nos résultats soient valables pour toute solution démarrant dans cet ouvert. Pour le cas local au contraire, les résultats obtenus ne sont valables que dans une région, en général plus petite que la région prescrite.

L'exemple simple suivant, dû à mon collègue F. Mazenc, illustre cette différence.

**Exemple :** Considérons le système d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^3 + \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= u . \end{cases} \quad (0.3)$$

Nous cherchons à stabiliser asymptotiquement la solution  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ , globalement sur l'ouvert  $(-1, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$ , difféomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . Ceci signifie que nous cherchons un contrôleur  $\vartheta(x_1, x_2)$  qui rende l'ouvert  $(-1, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$  un sous ensemble du bassin d'attraction de l'équilibre  $(x_1, x_2) = (0, 0)$ . Pour obtenir cette commande, faisons le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{x_1}{(1 - x_1^2)^{1/2}} \\ Y_2 &= \tan x_2 . \end{aligned} \quad (0.4)$$

L'ouvert  $(-1, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$  est bien transformé en  $\mathbb{R}^2$  et le système (0.3) est transformé en :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 &= Y_1^3 + (1 + Y_1^2)^{3/2} \frac{Y_2}{(1 + Y_2^2)^{1/2}} \\ \dot{Y}_2 &= (1 + Y_2^2)u \end{cases} \quad (0.5)$$

pour lequel un contrôleur globalement et asymptotiquement stabilisant est :

$$u = \left[ (1 + Y_2^2) \left( 1 + \frac{Y_1 Y_2}{(1 + Y_1^2)^{1/2} (1 + Y_2^2)^{1/2}} \right) \right]^{-1} \times \left[ -\frac{Y_1 (1 + Y_1^2)^{3/2}}{(1 + Y_2^2)^{1/2}} - \frac{1}{1 + Y_1^2} \left( Y_1^3 + (1 + Y_1^2)^{3/2} \frac{Y_2}{1 + Y_2^2} \right) - Y_2 - \frac{Y_1 (1 + Y_2^2)^{1/2}}{(1 + Y_1^2)^{1/2}} \right]. \quad (0.6)$$

Il est associé à la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(Y_1, Y_2) = \frac{1}{2} Y_1^2 + \frac{1}{2} \left( Y_2 + \frac{Y_1}{(1 + Y_1^2)^{1/2}} (1 + Y_2^2)^{1/2} \right)^2. \quad (0.7)$$

Il est intéressant de noter que  $\sin x$  est une fonction bijective de  $(-\pi/2, \pi/2)$  sur  $(-1, 1)$ , ainsi la méthode, maintenant classique, d'ajout d'un intégrateur [76, 7], aurait pu être appliquée directement au système (0.3) après avoir fait le changement de coordonnées suivant :

$$\begin{aligned} Z_1 &= x_1 \\ Z_2 &= \sin x_2. \end{aligned} \quad (0.8)$$

Dans ce cas, l'ouvert  $(-1, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$  est transformé en  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  et le système (0.3) est transformé en :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 &= Z_1^3 + Z_2 \\ \dot{Z}_2 &= (1 - Z_2^2)^{1/2} u. \end{cases} \quad (0.9)$$

La version la plus simple de cette méthode d'ajout d'un intégrateur donne la fonction  $U$  suivante comme fonction de Lyapunov assignable :

$$U(Z_1, Z_2) = \frac{1}{2} Z_1^2 + \frac{1}{2} (Z_2 + Z_1 + Z_1^3)^2. \quad (0.10)$$

Le contrôleur  $u$  associé est :

$$u = -(1 - Z_2^2)^{-1/2} [Z_1 + (1 + 3Z_1^2)(Z_1^3 + Z_2) + (Z_2 + Z_1 + Z_1^3)]. \quad (0.11)$$

Malheureusement pour que cette commande puisse être appliquée au système (0.3), il faut garantir que la composante  $Z_2$  des solutions reste tout le temps dans l'ouvert  $(-1, 1)$ . Donc une estimée du bassin d'attraction est :

$$S = \{(Z_1, Z_2) \mid U(Z_1, Z_2) \leq c\}$$

où  $c$  est le plus grand des nombres réels positifs tels que

$$\{(Z_1, Z_2) \mid U(Z_1, Z_2) \leq c\} \subset (-1, 1) \times (-1, 1).$$

$S$  est donc strictement inclus dans  $(-1, 1) \times (-1, 1)$  dans le nouveau système de coordonnées, en d'autres termes, strictement inclus  $(-1, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$  dans l'ancien système de coordonnées  $(x_1, x_2)$ .

Nous voyons ainsi qu'en spécifiant à l'avance le domaine de stabilisation désiré de sorte qu'un changement de coordonnées le transforme en l'espace tout entier, nous avons pu obtenir une loi de commande stabilisant globalement sur l'ouvert  $(-1, 1) \times (-\pi/2, \pi/2)$  et non pas uniquement localement comme le donne cette application trop hâtive de la technique d'ajout d'un intégrateur.

Dans tout ce qui suit, pour simplifier la présentation, chaque fois que nous parlons d'"un signal  $f(t)$  défini sur  $[0, T)$  avec  $T > 0$ ", ceci signifie souvent, sauf que nous le précisons, que  $f(t)$  est défini sur un intervalle semi-ouvert fini ou infini.

## Liste des principales abréviations <sup>1</sup>

Les données originales sont manquantes

---

<sup>1</sup> Les abréviations d'expressions anglaises sont notées d'une étoile \*.





# Chapitre 1

## Caractérisation des Effets Non Modélisés et Théorèmes Correspondants

### 1.0 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons et comparons rapidement diverses caractérisations des effets non modélisés des systèmes dynamiques *non* commandés proposées dans la littérature. La motivation de notre étude vient du fait qu'en Automatique, la synthèse de loi de commande a toujours pour but de prendre en compte des incertitudes qui se présentent dans les systèmes réels. Typiquement on distingue 3 types de processus :

- 1 – le processus réel auquel la commande doit garantir de bonnes propriétés.
- 2 – le modèle de simulation, qui étant déjà un modèle, est une idéalisation de la réalité bien qu'on le veuille d'habitude le plus réaliste possible.
- 3 – le modèle de synthèse qui est un modèle simplifié pour permettre sa manipulation dans la conception de la commande.

La description complète du processus réel étant impossible, on espère la modélisation suffisamment bien faite pour qu'il puisse être considéré comme une (petite) perturbation du modèle de simulation. L'objectif de commande est atteint si les propriétés garanties pour le modèle de simulation ou de synthèse par la conception de la commande sont préservées en présence de ces (petites) perturbations. Dans ce cas, on dit que ces propriétés sont *robustes* par rapport aux incertitudes, ou plus précisément, que ces propriétés sont ouvertes pour la "topologie" définie souvent très implicitement par la caractérisation choisie pour les incertitudes. Dans ce chapitre, on se place à commande fixée et nous étudions d'abord les systèmes dynamiques non commandés. Dans les chapitres suivants, on passe aux systèmes dynamiques commandés.

Comme nous le verrons en deuxième partie (constituée des chapitres 2 et 3), les résultats principaux du Chapitre 1 peuvent être utilisés pour définir des objectifs de synthèse pour la détermination des commandes pour les systèmes commandés. On cherche alors à synthétiser des contrôleurs assurant une certaine robustesse des propriétés correspondantes et en particulier de celle de la bornitude des solutions.

La seconde méthode de Lyapunov est une des méthodes favorites des automaticiens pour l'étude de la stabilité. Non seulement elle représente un outil efficace pour l'étude de la stabilité, mais aussi elle permet d'exhiber des propriétés qualitatives des solutions de systèmes

dynamiques. Cette méthode consiste à ramener l'étude de la stabilité à celle de l'existence d'une fonction "énergie", nommée fonction de Lyapunov pour laquelle l'équilibre est un minimum. Malgré l'importance évidente de cette idée, l'existence d'une telle fonction de Lyapunov pour une équation différentielle n'est pas toujours facile à prouver. D'où la nécessité de combiner la méthode de Lyapunov avec d'autres techniques afin de développer une méthode plus utile et directe.

Nous avons indiqué qu'un processus réel n'est jamais parfaitement décrit, mais on peut espérer obtenir une bonne représentation en prenant un modèle de simulation sous forme décrite par les équations différentielles :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, t) + \omega(x, z, t) \\ \dot{z} &= h(x, z, t) , \end{cases} \quad (1.1)$$

ce système différentiel étant souvent trop complexe, on cherche à étudier ses propriétés à partir d'un modèle de synthèse simplifié et décrit par :

$$\dot{x} = f(x, t) . \quad (1.2)$$

Puisque la réalité n'est pas accessible et que l'on postule que (1.1) en est une bonne description, nous identifions processus réel et modèle de simulation et nous appellerons (1.2) *modèle* de (1.1). Dans ce cas, le terme  $\omega$  dépendant de  $x$ ,  $z$  et de  $t$  sera appelé *perturbation* de (1.2) par rapport à (1.1). Le problème qui nous intéresse est de savoir quelles propriétés de stabilité possèdent les solutions de (1.1) quand (1.2) a des solutions uniformément stables ou uniformément asymptotiquement stables (deux notions à préciser ci-dessous). Pour répondre à cette question, l'avantage de combiner la seconde méthode de Lyapunov avec d'autres techniques est évident surtout quand la taille du modèle (i.e.  $\dim(x)$ ) est strictement inférieure à celle du processus réel (i.e. le cas où  $\dim(z) > 0$ ).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante : on commence par un bref rappel de quelques caractérisations classiques en présentant des résultats connus liés à ces caractérisations. Deux caractérisations plus récentes (SpES et GUEC pour le cas global, ou LISS et LUEC pour le cas local) sont proposées avec pour but de contenir une classe d'incertitudes la plus large possible. Une brève comparaison avec les approches classiques est donnée à la fin du chapitre. Nous avons fait un certain nombre de notes bibliographiques pour permettre au lecteur de situer nos rappels ou nos contributions.

## 1.1 Caractérisations classiques

Dans cette section, en introduisant certaines restrictions sur les fonctions  $\omega$  et  $h$  du système (1.1), nous prendrons en compte des caractérisations de perturbations qui appartiennent en gros aux trois théories de stabilité suivantes :

- La théorie de la stabilité totale.
- La théorie des perturbations singulières.
- La théorie des perturbations régulières.

Afin de les comparer, nous allons, sans entrer dans les détails techniques, rappeler certains points importants de ces trois théories. Mais tout d'abord, nous allons rappeler quelques notions

fondamentales de la stabilité au sens de Lyapunov dans le cas où dans (1.2) le champ de vecteurs  $f$  est régulier sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  et  $x = 0$  est un *point d'équilibre* ou tout simplement *équilibre*, i.e. :

$$f(0, t) = 0, \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (1.3)$$

**Définition 1.1** *L'équilibre  $x = 0$  de l'équation différentielle (1.2) est stable au sens de Lyapunov si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre réel  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tel que pour toute condition initiale  $x_0$  satisfaisant  $|x_0| < \delta$ , la solution associée  $x(t)$  avec  $x(t_0) = x_0$ , définie sur  $[t_0, +\infty)$ , satisfait*

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.4)$$

*Si, en plus,  $\delta$  ne dépend que de  $\varepsilon$ , on dit que  $x = 0$  est uniformément stable au sens de Lyapunov.*

*Dans le cas où la propriété (1.4) n'est pas satisfaite, on dit que l'équilibre  $x = 0$  est instable.*

**Définition 1.2** *L'équilibre  $x = 0$  de l'équation différentielle (1.2) est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov s'il est stable et attractif, attractif ayant le sens suivant : pour une certaine constante  $\rho > 0$ , quels que soient  $\eta > 0$  et  $t_0 > 0$ , il existe une constante  $T(\eta, x_0, t_0) \geq 0$  tel que :*

$$|x_0| < \rho \implies |x(t)| < \eta \quad \forall t \geq t_0 + T. \quad (1.5)$$

*Si, en plus,  $T$  ne dépend pas de  $t_0$  mais dépend seulement de  $(\eta, x_0)$  et si  $x = 0$  est uniformément stable, alors on dit que  $x = 0$  est uniformément asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.*

**Remarque 1.1** L'uniformité dans les deux définitions précédentes est vérifiée par les systèmes périodiques et surtout les systèmes autonomes.  $\square$

**Définition 1.3** *L'équilibre  $x = 0$  de l'équation différentielle (1.2) est globalement stable si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe un  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta(\varepsilon, t_0) = \infty$  et pour toute condition initiale  $x_0$  satisfaisant  $|x_0| < \delta$ , la solution  $x(t)$  avec  $x(t_0) = x_0$ , définie sur  $[t_0, +\infty)$ , satisfait :*

$$|x(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

*L'équilibre  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable (GAS). s'il est globalement stable et globalement attractif, i.e. : pour toute valeur de  $\rho > 0$ , quels que soient  $\eta > 0$  et  $t_0 > 0$ , il existe une constante  $T(\eta, x_0, t_0) \geq 0$  tel que :*

$$|x_0| < \rho \implies |x(t)| < \eta \quad \forall t \geq t_0 + T.$$

*Si, de plus,  $\delta$  et  $T$  ne dépendent pas de  $t_0$ ,  $x = 0$  est l'équilibre uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS).*

Deux autres définitions équivalentes de UGAS sont dans le théorème suivant :

**Théorème 1.1** *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'équilibre  $x = 0$  de (1.2) est UGAS.*

(ii) *Il existe une fonction régulière  $V(x, t)$ , et trois fonctions définies positives  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  telles que  $\alpha_1$  est propre et :*

$$\alpha_1(x) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (1.6)$$

$$\dot{V}|_{(1.2)} \leq -\alpha_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.7)$$

(iii) *Il existe une fonction  $\beta$  de classe KL telle que, pour toute condition initiale  $x_0$ , la solution associée  $x(t)$  de (1.2) satisfait :*

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.8)$$

*Preuve :* L'équivalence entre (i) et (ii) est donnée par Kurzweil [42, Theorems 1 & 7]. L'équivalence avec (i) et (iii) est donnée par Hahn [20, Theorems 35.1 & 35.2].  $\square$

**Notes bibliographiques.** Les définitions 1.1 et 1.2 de stabilité au sens de Lyapunov peuvent être trouvées dans la plupart de livres pédagogiques en automatique, par exemple, [4, 20, 37, 77]. La définition de stabilité (asymptotique) globale (uniforme) se trouve par exemple dans Hahn [20] ou Narendra-Annaswamy [55].

Maintenant on rappelle trois caractérisations classiques de perturbations.

### 1.1.1 Théorie de la stabilité totale

Considérons le cas où nous avons, dans (1.1),  $\omega := \omega(x, t)$  et  $\dim(z) = 0$ , c'est-à-dire le cas où aucune dynamique n'est rajoutée par la perturbation  $\omega$ . Si  $\omega(0, t) \equiv 0$ , la stabilité de Lyapunov garde son sens. Par contre, dès que  $\omega(0, t) \not\equiv 0$ , il nous faut introduire une nouvelle notion de stabilité, la *stabilité totale*.

**Définition 1.4** *L'équilibre  $x = 0$  de (1.2) est totalement stable si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe deux nombres réels positifs  $\delta_1(\varepsilon)$  et  $\delta_2(\varepsilon)$  tels que  $|x_0| < \delta_1$  et  $|\omega(x, t)| < \delta_2$  impliquent que la solution  $x(t)$  de (1.1), avec  $x(t_0) = x_0$ , satisfait  $|x(t)| < \varepsilon$ .*

La relation entre la stabilité totale et la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov est illustrée par le théorème suivant dont la réciproque est fausse même si  $\omega(0, t) \equiv 0$ .

**Théorème 1.2** *Si l'équilibre  $x = 0$  de (1.2) est uniformément asymptotiquement stable, alors il est totalement stable.*

*Preuve :* voir Appendice A.  $\square$

**Remarque 1.2** La réciproque du théorème 1.2 est fausse. Voici un contre-exemple :

$$\dot{x} = -x \left( \sin \frac{1}{x} \right)^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

L'obstacle à la stabilité asymptotique de ce système en  $x = 0$  est qu'il possède une infinité de points d'équilibre autour de  $x = 0$ . Par contre, il est connu [4, Theorem A.12] que, s'il existe un voisinage de l'origine qui ne contient aucun ensemble invariant sauf l'origine, alors la réciproque du théorème 1.2 est vraie, i.e. la stabilité totale implique la stabilité asymptotique.  $\square$

**Remarque 1.3** La version *globale* du Théorème 1.2 est fausse de même que sa réciproque, en d'autres termes, la GAS uniforme de l'équilibre n'implique pas la stabilité totale globale i.e. la satisfaction de  $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \delta_1(\varepsilon) = \infty$  dans la Définition 1.4. Voici un exemple simple :

$$f(x, t) = -x, \quad \omega(x, t) = \lambda x^2$$

où  $\lambda$  est un nombre réel strictement positif quelconque. Donc la notion de stabilité totale n'a en général qu'un intérêt *local*.  $\square$

Pour mieux apprécier la notion de stabilité totale, il est utile d'observer qu'un grand nombre de systèmes ont cette propriété, une sous classe ayant été identifiée par le Théorème 1.2.

**Théorème 1.3** *S'il existe une fonction définie positive  $V(x, t)$  dont les dérivées partielles  $\partial V / \partial x_i$  sont bornées dans une région  $G_x \times \mathbb{R}_+$ ,  $G_x$  un voisinage de  $x = 0$ , et dont la dérivée le long des solutions de (1.2) est définie négative, alors l'équilibre de (1.2) est totalement stable.*

**Notes bibliographiques.** La notion de stabilité totale est très répandue dans la littérature sur la stabilité du mouvement. Une bonne référence est le livre [20] de Hahn. Le contenu de ce paragraphe est tiré principalement de ce livre. Les théorèmes 1.2 et 1.3 sont respectivement [20, Theorem 56.4] et [20, Theorem 56.3]. Le contre-exemple donné dans la Remarque 1.2 est dû à Bacciotti [4, p. 165]. La preuve du théorème 1.2 a été prise de Narendra et Annaswamy [55]. Le théorème 1.2 sera utilisé pour nos analyses de comparaison.

### 1.1.2 Théorie des perturbations singulières

Considérons un cas particulier du système (1.1) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, z, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{z} &= h(x, z, \varepsilon) \end{cases} \quad (1.9)$$

où  $(x, z)$  est un vecteur d'état défini sur un ensemble ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ ,  $\varepsilon$  est un petit paramètre réel positif, et  $f$  et  $h$  sont deux fonctions régulières définies sur  $U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  pour  $\varepsilon_0 > 0$ . Un système de ce type est appelé un *système singulièrement perturbé*. La théorie des perturbations singulières consiste à étudier le comportement des solutions de (1.9) pour  $\varepsilon$  suffisamment petit mais non nul, et au mieux, de déduire les propriétés asymptotiques de (1.9) à partir du comportement asymptotique de son système dégénéré :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, z, 0) \\ 0 &= h(x, z, 0) . \end{cases} \quad (1.10)$$

Le mot “dégénéré” vient du fait que le système (1.10), étant obtenu de (1.9) avec  $\varepsilon = 0$ , est d'ordre inférieur à celui de (1.9). Remarquons qu'à cause de la nonlinéarité, la seconde équation de (1.10) peut avoir plusieurs solutions. Pour bien situer notre problème, on suppose que toutes les solutions  $z = \varphi(x)$  de la seconde équation de (1.10) sont isolées et de composantes réelles. Choisissons une solution  $z = \varphi(x)$ . (La façon de la choisir est telle que les hypothèses du théorème 1.4 ci-dessous soient satisfaites.) Dans ce cas, le système (1.10) se réécrit comme :

$$\dot{x} = f(x, \varphi(x), 0) . \quad (1.11)$$

Ce système est appelé *système réduit* ou *modèle d'ordre réduit*.

Définissons une nouvelle variable  $\bar{z} := z - \varphi(x)$ . Dans le nouveau système de coordonnées  $(x, \bar{z})$ , le système (1.9) est représenté par le système :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x, \bar{z} + \varphi(x), \varepsilon) := f_0(x, \bar{z}, \varepsilon) \\ \varepsilon \dot{\bar{z}} &= h(x, \bar{z} + \varphi(x), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x, \bar{z} + \varphi(x), \varepsilon) := h_0(x, \bar{z}, \varepsilon) . \end{cases} \quad (1.12)$$

La transformation réalisée entre (1.9) et (1.12) a conduit à :

$$h_0(x, 0, 0) = 0 ,$$

si bien que le système réduit devient :

$$\dot{x} = f_0(x, 0, 0) . \quad (1.13)$$

Aussi, introduisons un nouveau changement de variables sur l'axe du temps :

$$\tau = \frac{t}{\varepsilon} .$$

Puisque  $\varepsilon$  est un petit paramètre, cette nouvelle variable  $\tau$  est souvent appelée *temps rapide*, tandis que  $t$  est appelée *temps lent*. En utilisant le symbole “ $'$ ” pour représenter la dérivation par rapport à  $\tau$ , vu (1.12), on obtient un autre système “limite” de (1.9) en plus du système “limite” (1.13) :

$$\bar{z}' = h_0(x, \bar{z}, 0) \quad (1.14)$$

où  $x$  pourrait être regardé comme un paramètre constant (son évolution en temps est lente).

Le théorème suivant nous permet de relier la stabilité asymptotique de deux systèmes “limites” (1.11) et (1.14) à la stabilité asymptotique du système original (1.9).

**Théorème 1.4** [17] *Supposons que les champs de vecteurs  $f_0$  et  $h_0$  dans (1.12) sont tels que les matrices jacobiniennes suivantes :*

$$M_{f_0} = \frac{\partial f_0(x, 0, 0)}{\partial x}(0) \quad \text{et} \quad M_{h_0} = \frac{\partial h_0(0, \bar{z}, 0)}{\partial \bar{z}}(0)$$

*sont strictement Hurwitz i.e. les parties réelles de leurs valeurs propres sont strictement négatives.*

*Alors il existe un nombre réel positif  $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$  tel que, pour chaque  $0 < \varepsilon < \varepsilon^*$  le système original (1.9) possède un équilibre  $(x_\varepsilon, z_\varepsilon)$  près de 0, avec les propriétés suivantes :*

- 1-  $(x_\varepsilon, z_\varepsilon)$  est le seul équilibre de (1.9) contenu dans un voisinage approprié de 0,*
- 2-  $(x_\varepsilon, z_\varepsilon)$  est (localement) exponentiellement asymptotiquement stable.*

La preuve du théorème précédent est basée sur la Théorie de Variété Centre (voir, par exemple, [11]). Il est intéressant de noter un cas particulier de (1.9) où l'utilisation de la technique de la variété centre n'est pas utile, mais où la première méthode de Lyapunov est tout simplement appliquée.

**Corollaire 1.5** *Sous les hypothèses du Théorème 1.4, supposons que*

$$\varphi(0) = 0, \quad f(0, 0, \varepsilon) = h(0, 0, \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0),$$

*alors il existe un nombre réel positif  $\varepsilon^* \in (0, \varepsilon_0)$  tel que, pour tous les  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.9) est exponentiellement asymptotiquement stable.*

*Preuve :* Sous les hypothèses de ce corollaire, le linéarisé du système (1.12) autour de  $(0, 0)$  s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (M_{f_0} + A_0(\varepsilon))x + A_1(\varepsilon)\bar{z} \\ \dot{\bar{z}} &= \frac{1}{\varepsilon}(M_{h_0} + B_0(\varepsilon))\bar{z} + B_1(\varepsilon)x \end{aligned} \quad (1.15)$$

où  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B_0$  et  $B_1$  sont quatre matrices de dimensions appropriées et dépendent de façon continue en  $\varepsilon$ , avec  $A_0(0) = 0$  et  $B_0(0) = 0$ . D'après [44, Theorem 24.I] sur les conditions de stabilité fournies par la première approximation et la technique de lieu des pôles [16], il existe un nombre réel positif  $\varepsilon^* < \varepsilon_0$  tel que pour  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  l'équilibre  $(x, \bar{z}) = (0, 0)$  de (1.12) et donc  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.9) est exponentiellement asymptotiquement stable.  $\square$

L'exemple suivant montre que, bien que très restrictives, les hypothèses dans le théorème 1.4 ou dans le corollaire 1.5 ne peuvent être supprimées.

**Exemple 1.1** : On considère le système singulièrement perturbé :

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^5 + \varpi(\varepsilon)z^2 \\ \varepsilon \dot{z} = -z + \varepsilon x^2 \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\varpi(\cdot)$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , continue telle que :

$$\varpi(\varepsilon) > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (1.17)$$

Pour cet exemple, le système réduit :

$$\dot{x} = -x^5$$

est asymptotiquement (mais non exponentiellement) stable en son équilibre  $x = 0$ . Notons donc que les hypothèses du corollaire 1.5 ne sont pas satisfaites. On va montrer que l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.16) est instable. Pour ce faire, on réécrit (1.16) dans le système du temps rapide i.e.  $\tau = t/\varepsilon$ , avec “'” désignant la dérivation par rapport à  $\tau$  :

$$\begin{cases} x' &= \varepsilon(-x^5 + \varpi(\varepsilon)z^2) \\ z' &= -z + \varepsilon x^2. \end{cases} \quad (1.18)$$

D'après la Théorie de Variété Centre [11], une variété centre en  $(0, 0)$  de (1.16) est une fonction  $z = \pi(x)$  satisfaisant :

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}(x) \varepsilon(-x^5 + \varpi(\varepsilon)\pi(x)^2) = -\pi(x) + \varepsilon x^2. \quad (1.19)$$

Une solution possible de (1.19) est de type :

$$\pi(x) = \varepsilon x^2 + R_5(x)$$

où  $R_5(x)$  est un reste d'ordre 5. Le flot sur la variété centre  $z = \pi(x)$  est donné par :

$$x' = \varepsilon(\varpi(\varepsilon)\varepsilon^2 x^4 - x^5) + R_7(x)$$

avec  $R_7(x)$  un reste d'ordre 7, et donc est instable en  $x = 0$  pour *n'importe quel*  $\varepsilon > 0$ . Donc, vu le Principe de Réduction dans la Théorie de Variété Centre [11, Theorem 2, pp.21], on conclut que l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.16) est instable.

On reviendra sur cet exemple dans la Section 1.4 où une autre explication de l'instabilité en  $(0, 0)$  va être donnée. ■

Remarquons que le corollaire 1.5 a été prouvé par Kokotović, Khalil et O'Reilly [40, Corollary 2.3, pp.297] avec une approche de type Lyapunov, c'est-à-dire que, au lieu de supposer directement la stabilité asymptotique de (1.11) et de (1.14), les auteurs demandent l'existence de fonctions de Lyapunov appropriées pour le système réduit (1.11) et pour le système rapide (1.14). Aussi certaines conditions de croissance sur les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  du système original (1.9) exprimées par ces fonctions de Lyapunov sont demandées. L'intérêt de cette dernière approche par rapport à celle présentée ci-dessus est que, d'une part, le problème global et le problème local peuvent être traités en même temps, d'autre part, la généralisation du cas autonome au cas non-autonome est simple.

Plus précisément, considérons un système nonlinéaire singulièrement perturbé :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, z), \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z), \quad z \in \mathbb{R}^r \end{aligned} \quad (1.20)$$

qui admet un équilibre isolé à l'origine  $(x, z) = (0, 0)$ . Supposons que  $f$  et  $g$  sont suffisamment régulières pour que, les conditions initiales étant spécifiées, (1.20) ait une solution unique.



Soient  $B_x \subset \mathbb{R}^n$  et  $B_z \subset \mathbb{R}^r$  deux ensembles ouverts. Pour étudier la stabilité du système (1.20) dans le domaine  $B_x \times B_z$ , nous faisons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1 :**

L'origine est un équilibre isolé de (1.20) dans  $B_x \times B_z$ , et  $z = h(x)$  est une racine isolée de  $0 = g(x, z)$ .

**Hypothèse 2 :**

Il existe une fonction  $W$  de classe  $C^1$  telle que pour tous les  $(x, z) \in B_x \times B_z$

$$(i) \quad W(x, z) > 0 \quad \forall z \neq h(x) \quad \text{et} \quad W(x, h(x)) = 0.$$

$$(ii) \quad \frac{\partial W}{\partial z} g(x, z) \leq -c_2 \phi^2(z - h(x)) , \quad c_2 > 0 \quad (1.21)$$

$$(iii) \quad \frac{\partial W}{\partial x} f(x, z) \leq k \phi^2(z - h(x)) + d_2 \psi(x) \phi(z - h(x)) , \quad k > 0 , \quad d_2 > 0 \quad (1.22)$$

où  $\psi(\cdot)$  et  $\phi(\cdot)$  sont deux fonctions scalaires qui s'annulent seulement en leurs origines respectives.

**Hypothèse 3 :**

Il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$  pour le système réduit de (1.20) :

$$\dot{x} = f(x, h(x)) \quad (1.23)$$

telle que pour tous les  $(x, z) \in B_x \times B_z$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, h(x)) \leq -c_1 \psi^2(x) , \quad c_1 > 0 , \quad (1.24)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x, z) - f(x, h(x))] \leq d_1 \psi(x) \phi(z - h(x)) , \quad d_1 > 0 . \quad (1.25)$$

Nous avons :

**Théorème 1.6** [40] *Sous les hypothèses 1-3, l'origine est un équilibre asymptotiquement stable du système singulièrement perturbé (1.20) pour tous les  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ , où  $\varepsilon^* > 0$  est donnée par :*

$$\varepsilon^* = \frac{c_1 c_2}{c_1 k + d_1 d_2} . \quad (1.26)$$

**Corollaire 1.7** [40] *Supposons que les hypothèses du théorème 1.6 sont vérifiées pour tous les  $(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$  et que les fonctions  $V$  et  $W$  sont propres (i.e.  $W(x, z) \rightarrow +\infty$  si  $|z - h(x)| \rightarrow +\infty$ ). Alors, l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  est globalement asymptotiquement stable pour tous les  $\varepsilon$  dans  $(0, \varepsilon^*)$ .*

**Notes bibliographiques.** La plupart de résultats du paragraphe se trouvent dans Fenichel [17] et Kokotović, Khalil et O'Reilly [40]. L'exemple 1.1 vient de Isidori [26]; nous avons introduit le coefficient  $\varpi(\varepsilon)$  pour permettre une meilleure illustration. Le théorème 1.4, qui est une version en temps infini du Théorème de Tikhonov [75], est dû à Fenichel [17]. Le cas particulier où un système singulièrement perturbé admet un équilibre isolé et constant pour les paramètres de perturbation proches du zéro a été résumé par Kokotović, Khalil et O'Reilly [40]. Le théorème 1.6 et le corollaire 1.7 sont dans [40, pp.297]. Pour plus de clarté et faciliter nos comparaisons de la Section 1.4, nous nous sommes limités au cas stationnaire. Les lecteurs intéressés sont invités à consulter Kokotović, Khalil et O'Reilly [40, Chap.7] pour une version instationnaire de ces théorèmes.



### 1.1.3 Théorie des perturbations régulières

La théorie des perturbations régulières [75] a pour objet d'étudier le système nonlinéaire suivant :

$$\dot{X} = F(X, t, \varepsilon), \quad X \in \mathbb{R}^N \quad (1.27)$$

où  $\varepsilon$  est un petit paramètre et le second membre de (1.27) dépend de  $\varepsilon$  d'une façon *régulière*. Ceci implique en particulier que la dimension de l'espace dans lequel vit le système ne change pas lorsque  $\varepsilon$  reste dans un voisinage de 0. (1.27) peut être vue comme une sous-classe des systèmes représentés par (1.1), le modèle (1.2) s'obtient en faisant  $\varepsilon = 0$  dans (1.27). (Dans ce cas, l'ordre de  $z$  peut être supérieur ou égal à 0.)

Nous rappelons ici des résultats concernant le cas où (1.27) se décompose de la façon suivante :

$$\dot{y} = f(y, z, t, \varepsilon), \quad y \in \mathbb{R}^{n_1} \quad (1.28)$$

$$\dot{z} = h(y, z, t, \varepsilon), \quad z \in \mathbb{R}^{n_2} \quad (1.29)$$

où les champs de vecteurs  $f$  et  $h$  sont définis sur  $U \times \mathbb{R}_+ \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ ,  $\varepsilon$  est un paramètre qui se trouve dans  $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  avec  $0 < \varepsilon_0 \leq +\infty$ , et  $U$  un voisinage ouvert de  $(0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ . Supposons que  $f$  et  $h$  sont localement lipschitziens et satisfont :

$$f(0, 0, t, \varepsilon) = 0, \quad h(0, 0, t, \varepsilon) = 0 \quad \forall t \geq 0, \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0).$$

L'avantage de la décomposition de (1.27) en deux sous systèmes est qu'au lieu d'étudier le système de départ (1.27) dont la dimension est souvent très grande, on étudie les deux "petits" sous-systèmes indépendamment l'un à l'autre en considérant les termes d'interconnexion comme des perturbations. Par exemple, le système (1.28)-(1.29) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, 0, t, 0) + [f(y, z, t, \varepsilon) - f(y, 0, t, 0)] \\ \dot{z} = h(0, z, t, 0) + [h(y, z, t, \varepsilon) - h(0, z, t, 0)] \end{cases} \quad (1.30)$$

Ainsi, le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(y, 0, t, 0) \\ \dot{z} = h(0, z, t, 0) \end{cases} \quad (1.31)$$

est considéré comme le modèle de synthèse pour (1.28)-(1.29), et les termes de perturbations sont  $f(y, z, t, \varepsilon) - f(y, 0, t, 0)$  et  $h(y, z, t, \varepsilon) - h(0, z, t, 0)$ .

Pour présenter un résultat sur ce problème, nous devons d'abord rappeler une définition de stabilité, la *quasi stabilité*.

Considérons un système instationnaire :

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (1.32)$$

Dénotons par  $B_x(r)$  la boule ouverte de rayon  $r > 0$ , centrée en  $x = 0$  et par  $R$  le nombre réel positif fini ou infini. Aussi, dénotons par  $|\cdot|_{\max}$  la norme maximum i.e.  $|x|_{\max} := \max\{|x_i|\}$  pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Supposons que le champ de vecteurs  $f$  est défini sur  $B_x(R) \times B_u(R) \times \mathbb{R}_+$ , localement lipschitzien et satisfait :

$$f(0, 0, t) = 0 \quad \forall t \geq 0.$$

**Définition 1.5** *L'origine  $x = 0$  est  $K$ -quasiment stable pour (1.32) lorsqu'il existe un nombre réel strictement positif  $K$  tel que, quels que soient  $0 < \eta < R$  et  $t_0 \geq 0$  il existe un nombre réel  $0 < \delta(\eta, t_0) \leq \eta$  tel que, pour n'importe quelle fonction continue du temps  $u(t)$  définie pour tous les  $t \geq 0$ , si  $|u(t_0)|_{\max} < \delta$ , alors toute solution  $x(t)$  de (1.32) avec  $u$  remplacé par  $u(t)$  et  $|x(t_0)|_{\max} < \delta$  admet la propriété que dans n'importe quel intervalle  $t_0 \leq t \leq t_1$  dans lequel  $|u(t)|_{\max} \leq \eta$  nous avons  $|x(t)|_{\max} < K\eta$ .*

*Dans le cas où  $R = +\infty$  et  $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \delta(\eta, t_0) = +\infty$ , on appellera la  $K$ -quasi stabilité globale.*

**Remarque 1.4** La  $K$ -quasi stabilité de  $x = 0$  pour  $\dot{x} = f(x, u, t)$  implique la stabilité (au sens de Lyapunov) de l'équilibre  $x = 0$  du système  $\dot{x} = f(x, 0, t)$ .  $\square$

Retournons maintenant au système (1.28)-(1.29). Supposons sans nuire à la généralité que les champs de vecteurs  $f$  et  $h$  sont définis sur  $B_y(R) \times B_z(R) \times \mathbb{R}_+ \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ , i.e.  $U = B_y(R) \times B_z(R)$ .

Nous avons :

**Théorème 1.8** [43, pp.124] *Si l'origine  $y = 0$  est (globalement)  $K_1$ -quasiment stable pour (1.28) et  $z = 0$  est (globalement)  $K_2$ -quasiment stable pour (1.29) respectivement, avec  $K_1 > 0$  et  $K_2 > 0$  tels que  $K_1 K_2 \leq 1$ , alors l'équilibre  $(y, z) = (0, 0)$  est (globalement) stable pour (1.28)-(1.29).*

*Preuve :* Etant donnés  $\eta > 0$  et  $t_0 \geq 0$ , il existe deux nombres réels positifs correspondants  $\delta_1(\eta, t_0)$  et  $\delta_2(\eta, t_0)$  de la  $K_1$ -quasi stabilité de (1.28) et de la  $K_2$ -quasi stabilité de (1.29). Supposons sans nuire à la généralité que  $K_1 \leq 1$ . Soit  $\delta$  un nombre réel strictement positif défini par :

$$\delta(\eta, t_0) = \min\{\delta_1(\eta, t_0), \delta_2(K_1\eta, t_0)\} . \quad (1.33)$$

Considérons une solution *maximale*  $(y(t), z(t))$  de (1.28)-(1.29) sur  $[t_0, T)$  telle que  $|y(t_0)|_{\max} < \delta$  et  $|z(t_0)|_{\max} < \delta$ . Supposons  $0 < t_1 < T$  le premier instant tel que  $|z(t_1)|_{\max} = \eta$ . Donc,  $|z(t)|_{\max} < \eta$  pour  $t_0 \leq t < t_1$ . Puisque  $y = 0$  est  $K_1$ -quasiment stable pour (1.28),  $|y(t)|_{\max} < K_1\eta$  pour  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Ceci implique, avec la  $K_2$ -quasi stabilité de (1.29), que  $z(t) < K_2 K_1 \eta$  sur  $[t_0, t_1]$ . Comme  $K_1 K_2 \leq 1$ , on obtient que  $z(t) < \eta$  sur  $[t_0, t_1]$ . Ceci contredit l'hypothèse que  $|z(t_1)| = \eta$ , et donc  $t_1 = T$ . En d'autres termes,  $|z(t)| < \eta$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . On en déduit tout de suite que  $|y(t)| < \eta$  pour tout  $t \in [t_0, T)$ . D'après le théorème de continuation des solutions, on montre par contradiction que  $T = +\infty$ . Finalement, on obtient que  $z(t) < \eta$  et  $|y(t)| < \eta$  pour tout  $t \in [t_0, +\infty)$ . Ceci dit,  $(y, z) = (0, 0)$  est stable pour (1.28)-(1.29).

Remarquons que si  $\delta_1(\eta, t_0)$  et  $\delta_2(\eta, t_0)$  tendent vers l'infini lorsque  $\eta$  tend vers l'infini, (1.33) implique :

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \delta(\eta, t_0) = +\infty .$$

$\square$

Il est important de noter la similarité du théorème 1.8 avec le théorème du petit gain linéaire.

Pour illustrer le théorème 1.8, considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} &= -y + \varepsilon_1 z \\ \dot{z} &= -z + \varepsilon_2 y . \end{cases} \quad (1.34)$$

Comme on peut le vérifier directement, le sous système  $y$  de (1.34) est  $(|\varepsilon_1| + \delta)$ -quasiment stable avec  $\delta > 0$  arbitraire. De même, le sous système  $z$  de (1.34) est  $(|\varepsilon_2| + \delta)$ -quasiment stable avec  $\delta > 0$  arbitraire. Dans le cas où  $|\varepsilon_1 \varepsilon_2| < 1$ , et nous choisissons  $\delta > 0$  comme suit :

$$0 < \delta \leq \frac{-(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|) + \sqrt{4 + (|\varepsilon_1| - |\varepsilon_2|)^2}}{2} ,$$

nous avons :

$$(|\varepsilon_1| + \delta)(|\varepsilon_2| + \delta) \leq 1.$$

Donc le théorème (1.8) s'applique à (1.34) et on obtient la stabilité de (1.34) lorsque  $|\varepsilon_1 \varepsilon_2| < 1$ . En effet, le système (1.34) est globalement exponentiellement stable lorsque  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 1$ .

Une autre illustration est donnée par le système nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} &= -y + \varepsilon_1 z_1 \\ \dot{z}_1 &= -z_1(z_1^2 + z_2^2 - \varepsilon_2 y^2) - z_2 \\ \dot{z}_2 &= -z_2(z_1^2 + z_2^2 - \varepsilon_2 y^2) + z_1. \end{cases} \quad (1.35)$$

Comme indiqué précédemment, le sous système  $y$  est  $(|\varepsilon_1| + \delta)$ -quasiment stable avec  $\delta > 0$  arbitraire. D'autre part, en considérant la fonction candidate de Lyapunov  $V = z_1^2 + z_2^2$  pour le sous système  $(z_1, z_2)$  de (1.35), nous pouvons démontrer que ce sous système avec  $y$  comme entrée est  $\sqrt{|\varepsilon_2|}$ -quasiment stable. D'où la stabilité de (1.35) est impliquée par le théorème 1.8 lorsque  $|\varepsilon_1| \sqrt{|\varepsilon_2|} < 1$ .

**Notes bibliographiques.** Il n'y a pas une définition unanime pour la “perturbation régulière”. Nous empruntons cette terminologie de l'ouvrage [75] de Tikhonov, Vasileva et Sveshnikov. Le théorème principal dans [75, Chap. 7] est relatif au comportement asymptotique des solutions de (1.27) en *temps fini* lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. La décomposition d'un système dynamique (1.27) sous forme de systèmes interconnectés (1.28) et (1.29) est très classique, même dans le contexte linéaire (voir, par exemple, Desoer-Vidyasagar [15]).

Le problème de la stabilité de (1.28)-(1.29) a été étudié par de nombreux chercheurs. La référence [43] de Lefschetz pour l'étude de stabilité d'un système interconnecté (1.28)-(1.29) est la seule bonne référence que nous avons pu trouvé dans la littérature. Selon le théorème 1.8 de Persidskii, le système (1.28)-(1.29) est stable si le sous système  $x$  (resp.  $z$ ) est  $K_1$  (resp.  $K_2$ )-quasi stable avec  $K_1 K_2 \leq 1$ . La contribution de ce théorème est que la stabilité d'un système de départ, qui est souvent complexe, peut être obtenue à travers l'étude de “petits” sous systèmes. Ainsi on réduit énormément la complexité du problème. Le théorème original de Persidskii [43, pp.124] traite le cas où  $K_1 = K_2 = 1$  et s'étend facilement au cas global.

Une autre façon d'énoncer la définition de  $K$ -quasi stabilité est dire que le système (1.32) est localement un opérateur de gain fini  $K$  pour la norme  $L^\infty$ . La condition  $K_1 K_2 \leq 1$  s'interprète alors comme la condition du théorème du petit gain (voir Desoer-Vidyasagar [15, Chap. 3]). En fait, c'est grâce à cette interprétation du théorème 1.8 de Persidskii que nous allons obtenir dans les sections suivantes une généralisation.

## 1.2 Caractérisations plus récentes: cas global

Dans la section 1.1, nous avons révisé trois caractérisations classiques des effets non-modélisés : la théorie de la stabilité totale, la théorie des perturbations singulières et la théorie des perturbations régulières. Nous avons pu constater que la notion de  $K$ -quasi stabilité est très utile pour l'étude de la stabilité d'un système décomposé en deux sous systèmes. Nous continuons à travailler le long de cette ligne dans cette section. Le premier objectif ici est de présenter le concept de SpES (stabilité pratique entrée-à-sortie) qui généralise la notion de  $K$ -quasi stabilité et permet d'établir un théorème assez général pour la stabilité du système interconnecté (1.28)-(1.29). Le second objectif est d'essayer d'établir une nouvelle caractérisation de type Lyapunov qui s'appellera GUEC. Il s'agit d'étudier la stabilité d'un système à partir d'un modèle de synthèse et, d'une hypothèse sur l'erreur de modélisation exprimée par une borne fonctionnelle d'une fonction de Lyapunov du modèle.

### 1.2.1 SpES et le théorème du petit-gain généralisé

L'objectif du paragraphe est d'étudier le système interconnecté suivant :

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, y_2, u_1), \quad y_1 = h_1(x_1, y_2, u_1) \quad (1.36)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2, y_1, u_2), \quad y_2 = h_2(x_2, y_1, u_2) \quad (1.37)$$

où, pour  $i = 1, 2$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$  et  $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$  représentent l'état et l'entrée du système,  $y_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  représente la sortie du sous système  $x_i$ . Les fonctions  $f_1, f_2, h_1$  et  $h_2$  sont régulières.

Nous introduisons d'abord quelques notions de stabilité liées à un système ayant  $x$  comme état,  $u$  comme entrée et  $y$  comme sortie :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = h(x, u), & y \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (1.38)$$

**Définition 1.6** On dit que le système (1.38) admet la propriété de :

1. Observabilité de la Non Bornitude (ONB) si, pour chaque entrée continue  $u(t)$  définie sur  $[0, T)$  avec  $0 < T \leq +\infty$ , la solution maximale associée  $x(t)$  de (1.38) définie sur  $[0, T')$  ( $T' \leq T$ ) satisfait la propriété suivante :

- 1) Si  $T'$  est strictement inférieur à  $T$ , alors  $y(t)$  est non bornée sur  $[0, T')$ .
- 2) Si  $T' = T$  et  $|x(t)|$  tend vers l'infini lorsque  $t$  tend vers  $T$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow T} (|u(t)| + |y(t)|) = +\infty.$$

2. Observabilité Forte de la Non Bornitude (OFNB) si, de plus, il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  telles que :

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma \left( \sup_{\tau \in [0, t]} |(u(\tau), y(\tau))^\top| \right) \quad \forall t \in [0, T'). \quad (1.39)$$

Notons que la définition OFNB est un peu différente à celle de Sontag [70, eq. (38)] car le terme  $\beta$  dépendant de la condition initiale  $x(0)$  est introduit dans (1.39).

**Définition 1.7** Le système (1.38) admet la propriété de Stabilité pratique Entrée-à-Sortie (SpES) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et une constante positive  $d$  telles que, quelles que soient la condition initiale  $x(0)$ , et trois fonctions continues  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $y(t)$  définies sur  $[0, T)$  qui satisfont le système (1.38), nous avons la propriété suivante :

$$|y(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma \left( \sup_{\tau \in [0, t]} |u(\tau)| \right) + d \quad \forall t \in [0, T). \quad (1.40)$$

Dans le cas où (1.40) est vérifiée avec  $d = 0$ , le système (1.38) est dit admettre la propriété de Stabilité Entrée-à-Sortie (SES).

La fonction  $\gamma$  dans (1.40) sera appelée *gain (nonlinéaire)* de l'opérateur entrée-sortie.

Avec ces notions en mains, nous énonçons le théorème principal de cette section.

#### Théorème 1.9 (Bornitude et Stabilité)

1. Supposons que (1.36) (resp. (1.37)) admet la propriété SpES avec  $(y_2, u_1)$  (resp.  $(y_1, u_2)$ ) comme entrée,  $y_1$  (resp.  $y_2$ ) comme sortie, et le triplet  $(\beta_1, \gamma_1, d_1)$  (resp.  $(\beta_2, \gamma_2, d_2)$ ) satisfaisant

(1.40), et que (1.36) et (1.37) satisfont la propriété ONB. S'il existe deux fonctions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de classe  $K_\infty$  et un nombre réel non-négatif  $d_3$  satisfaisant :

$$\gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_1(s) \leq (\text{Id} - \rho_2)(s) + d_3 \quad \forall s \geq 0, \quad (1.41)$$

alors, quelles que soient les fonctions continues  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  définies et bornées sur  $[0, +\infty)$ , toutes les solutions  $(x_1(t), x_2(t))$  de (1.36)-(1.37) sont définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées. De plus, si  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$  et  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , nous avons :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|y_1(t)| + |y_2(t)|) = 0. \quad (1.42)$$

2. Dans le cas où  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$ , et les hypothèses du point 1 sont vérifiées avec  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , si (1.36) et (1.37) satisfont la propriété OFNB, alors l'équilibre  $(x_1, x_2) = 0$  du système (1.36)-(1.37) est GAS.

**Remarque 1.5** Certaines conditions suffisantes garantissant (1.41) ont été données dans [47]. Aussi, la propriété (1.41) est équivalente à sa propriété symétrique: il existe deux fonctions  $\rho'_i$  ( $i = 1, 2$ ), de classe  $K_\infty$ , et un nombre réel non-négatif  $d'_3$  tels que :

$$\gamma_1 \circ (\text{Id} + \rho'_1) \circ \gamma_2(s) \leq (\text{Id} - \rho'_2)(s) + d'_3 \quad \forall s \geq 0. \quad (1.43)$$

□

**Remarque 1.6** Or la conclusion du théorème 1.9 est fondée sur la manipulation des deux inégalités (1.40) de SpES ainsi que la condition du petit gain (1.41), ce théorème peut être utilisé dans un contexte où soit le système considéré n'a pas explicitement une expression (1.36)-(1.37), soit il est instationnaire. Ceci sera le cas pour la Proposition 1.1 (voir les analyses de (1.70) à (1.78)) et pour le théorème 2.3 (bis). □

Nous appellerons le théorème 1.9 *théorème du petit gain généralisé*.

Il est intéressant de remarquer un cas particulier où  $y = x$  dans (1.38). Dans ce cas, les propriétés ONB et OFNB sont toujours satisfaites par (1.38) et la notion SES est la stabilité entrée-à-état (ISS), mais restreinte aux entrées continues. La notion SpES devient la stabilité pratique entrée-à-état (ISpS), i.e. :

**Définition 1.8** Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est entrée-à-état pratiquement stable (ISpS) avec  $u$  comme entrée s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et un nombre réel positif  $d$  tels que pour chaque entrée  $u(\cdot)$  mesurable, essentiellement bornée et définie sur l'intervalle semi-ouvert  $[0, +\infty)$ , et pour chaque condition initiale  $x(0)$ , la solution  $x(t)$  existe pour tous les  $t \geq 0$  et satisfait<sup>1</sup>

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|u_t\|) + d. \quad (1.44)$$

Si  $d = 0$  dans (1.44), ISpS devient ISS.

**Définition 1.9** Le système  $\dot{x} = f(x)$  est globalement pratiquement stable (GpS) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , un nombre réel positif  $d$  tels que les solutions  $x(t)$  avec la condition initiale  $x(0)$  sont définies sur  $[0, +\infty)$  et satisfont :

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + d. \quad (1.45)$$

Si  $d = 0$  dans (1.45), GpS est clairement GAS.

<sup>1</sup>  $\|\cdot\|$  signifie la norme  $L^\infty$ . Mais dans la suite, nous nous restreignons souvent aux signaux continus.

Nous avons pour cette notion ISpS un résultat un peu plus fort que le théorème 1.9, ceci non pas pour des raisons techniques mais simplement parce que c'est le premier résultat que nous avons obtenu. Plus précisément, considérons le système nonlinéaire (Figure 1.1) :

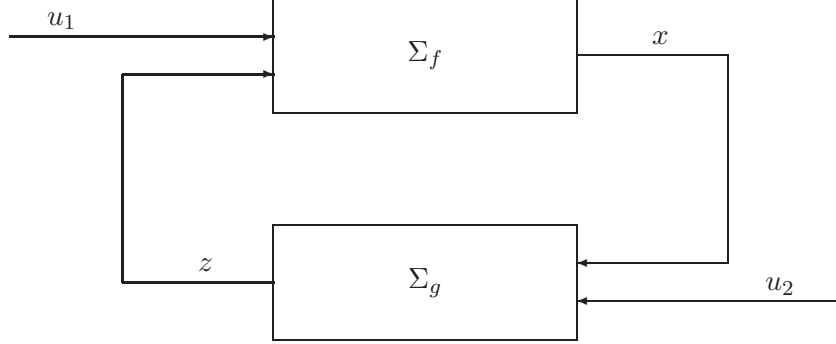


Figure 1.1: Système par bouclage

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_f : \quad \dot{x} = f(x, z, u_1) \\ \Sigma_g : \quad \dot{z} = g(x, z, u_2) \end{array} \right\} \quad (1.46)$$

où  $(u_1, u_2)$  est l'entrée,  $f$  et  $g$  sont deux fonctions régulières. Nous supposons que :

- (H1) le système  $\Sigma_f$  est ISpS avec  $(z, u_1)$  considérée comme entrée et  $(\beta_1, \gamma_1, d_1)$  comme triplet satisfaisant (1.44).
- (H2) le système  $\Sigma_g$  est ISpS avec  $(x, u_2)$  considérée comme entrée et  $(\beta_2, \gamma_2, d_2)$  comme triplet satisfaisant (1.44).

**Théorème 1.10** *Si les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites avec  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  telles qu'il existe deux fonctions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de classe  $K_\infty$  et un nombre réel non-négatif  $d_3$  satisfaisant :*

$$\gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_1(s) \leq (\text{Id} - \rho_2)(s) + d_3 \quad \forall s \geq 0, \quad (1.47)$$

*alors, le système (1.46) est ISpS avec  $(u_1, u_2)$  considérée comme entrée. De plus, si (H1) et (H2) existent avec  $d_1 = 0$  et  $d_2 = 0$ , et si (1.47) est satisfaite avec  $d_3 = 0$ , alors le système (1.46) est ISS avec  $(u_1, u_2)$  considérée comme entrée.*

*Preuve :* voir Appendice B. □

**Remarque 1.7** Quand les entrées  $u_1$  et  $u_2$  sont identiquement nulles, et  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ , le système (1.46) est en fait GAS. □

Pour illustrer le théorème 1.10, considérons le système suivant :

$$\dot{x} = Ax + \omega(x, z) \quad (1.48)$$

$$\dot{z} = h(x, z) \quad (1.49)$$

où  $A$  est une matrice strictement Hurwitz, et  $h$  et  $\omega$  sont deux champs de vecteurs réguliers tels que :

$$h(0, 0) = 0, \quad \omega(0, 0) = 0.$$

Soit  $P$  une matrice symétrique définie positive satisfaisant :

$$A^\top P + PA = -I .$$

Nous avons :

**Corollaire 1.11** *Si le système  $\dot{z} = h(x, z)$  est ISS avec  $x$  comme entrée, et s'il existe un nombre réel  $k$  dans  $(2, +\infty)$  tel que :*

$$kx^\top P\omega(x, z) \leq x^\top x \quad \forall x, \forall z, \quad (1.50)$$

*alors l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.48)-(1.49) est globalement asymptotiquement stable.*

*Preuve :* Nous allons démontrer que le sous système  $x$  (1.48) est ISS avec  $z$  comme entrée et un gain  $\gamma_x \equiv 0$ . Pour ce faire, considérons une fonction quelconque  $z(t)$  continue,<sup>2</sup> bornée et définie sur  $[0, +\infty)$ . Soit  $x(t)$  la solution maximale définie sur  $[0, T)$ .

Considérons la fonction :

$$V(x) = x^\top Px .$$

Sa dérivée temporelle le long des solutions de (1.48) est :

$$\dot{V} = -x^\top x + 2x^\top P\omega(x, z) .$$

A l'aide de (1.50), nous avons :

$$\dot{V} \leq -\left(1 - \frac{2}{k}\right)x^\top x \quad \forall t \in [0, T) .$$

Selon Sontag [70, Lemma 6.1], ceci implique  $T = +\infty$  et l'existence d'une fonction  $\beta_x$  de classe  $KL$  telle que :

$$x(t)^\top x(t) \leq \beta_x(x(0)^\top x(0), t) \quad \forall t \geq 0 .$$

On en conclut immédiatement que le sous système (1.48) est ISS avec  $z$  comme entrée et un gain  $\gamma_x \equiv 0$ . Le théorème 1.10 permet de conclure.  $\square$

**Notes bibliographiques.** Dans le contexte classique de la stabilité entrée-sortie (IOS) (voir, par exemple, [15]), le rôle des conditions initiales n'a pas été rendu explicite. Le théorème du petit gain linéaire<sup>3</sup> peut être trouvé dans Desoer et Vidyasagar [15]. Une généralisation récente du théorème du petit gain linéaire au cas de gains nonlinéaires est due à Hill [23] et Mareels et Hill [47]. La première partie du théorème 1.9 n'est rien d'autre que le théorème de Mareels et Hill [47, Theorem 2], relatif à l'approche entrée-sortie. La seconde partie du théorème 1.9 est un résultat de stabilité relatif à l'approche de Lyapunov. La notion SES est fortement liée à celle (IOS) proposée par Lin [45, Definition 4.2.1]. La notion ISS est due à Sontag [70, 71].

Le Corollaire 1.11 est une généralisation de [26, Lemma p.442] du cas local au global (voir aussi le Corollaire 1.15 du paragraphe 1.3.1).

<sup>2</sup>Comme  $z$  est ici une composante des solutions  $C^1$  du système (1.48)-(1.49), il suffit de considérer les entrées continues.

<sup>3</sup>Le mot "linéaire" ici signifie que les gains des sous-systèmes (pouvant être nonlinéaires) sont *linéaires*.



### 1.2.2 GUEC

L'objectif de ce paragraphe est de développer une nouvelle caractérisation de type Lyapunov dans le but de capturer une classe d'effets non modélisés la plus large possible. Pour l'approche SpES introduite dans le paragraphe précédent, nous avons étudié la stabilité d'un système en le décomposant convenablement en deux sous systèmes. Ici, nous nous contentons d'observer que les solutions du système ne satisfont pas l'équation différentielle du modèle que nous proposons. Dans ce contexte, le problème est d'essayer de proposer des bornes sur cette erreur d'équation qui soient à la fois utilisables et significatives. Ceci va être développé avec l'aide d'une fonction de Lyapunov du modèle et d'un signal de comparaison. Le prix de cette généralité est que nous ne pourrons donner qu'un résultat de valeur qualitative et non quantitative.

Plus précisément, considérons le système de simulation suivant <sup>4</sup>:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X, t), & X &\in \Omega \\ x &= H(X, t), & x &\in \mathbb{R}^n\end{aligned}\tag{1.51}$$

où  $X$  est l'état,  $x$  est une variable observée,  $F$  est le champ de vecteurs et  $H$  est une application d'observation, et  $\Omega$  est un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{R}^N$ . En général,  $x$  n'est pas l'observation directe notée  $y$  du système (1.51), elle est souvent la sortie d'un filtre ayant  $y$  comme entrée. Nous supposons que  $F$ ,  $X$  ainsi que sa dimension  $N$  sont inconnus, mais que  $F$  et  $H$  sont régulières sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  et telles que :

$$H(\Omega, 0) = \mathbb{R}^n .\tag{1.52}$$

L'interprétation de la contrainte (1.52) est que nous cherchons des résultats qui sont globaux dans l'espace de l'observation  $x$  du système (1.51). Le cas local sera traité dans la Section 1.3.

Notons que le système (1.51) a une forme plus générale que (1.1). Comme modèle pour l'évolution de la variable mesurée  $x = H(X, t)$  de (1.51), nous prenons le système dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n .\tag{1.53}$$

L'objectif est de :

*trouver des conditions suffisantes sous lesquelles la bornitude globale des solutions de (1.53) impliquerait la bornitude globale des solutions de (1.51).*

Pour cela, nous supposons dans un premier temps que le système de simulation (1.51) admet la propriété suivante où  $\partial\Omega$  représente la frontière de  $\Omega$  :

**Hypothèse OE (Observabilité de l'Evasion de  $\Omega$ )** (1.54)

*Pour toute condition initiale  $X(0)$  dans  $\Omega$ , soit  $X(t)$  la solution maximale sur  $\Omega$  associée de (1.51). Si  $X(t)$  est définie maximalement sur  $[0, T)$ , alors :*

$$(X(t) \rightarrow \partial\Omega \text{ si } t \rightarrow T) \Rightarrow \limsup_{t \rightarrow T} |H(X(t), t)| = +\infty .$$

L'hypothèse OE (1.54) signifie que, pour savoir que la trajectoire  $\{X(t)\}_{t \in [0, T)}$  est bornée, il suffit d'observer que la trajectoire  $\{H(X(t), t)\}_{t \in [0, T)}$  est bornée. En d'autres termes, l'état  $X(t)$  du système (1.51) ne peut pas tendre vers la frontière de son domaine "global"  $\Omega$  dans (1.52) sans

---

<sup>4</sup>Notons que notre problème n'a de sens que si  $n \leq N$ .



que l'observation  $x(t)$  ne tende vers l'infini. Néanmoins, nous remarquons que l'observation de l'évasion n'est pas impliquée par la notion usuelle d'observabilité. Voici un exemple très simple.

**Exemple 1.2** : Considérons le système d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x^3 \\ \dot{y} &= x \end{cases} \quad (1.55)$$

Pour ce système, nous posons  $X = (x, y)^\top$  et l'application d'observation est donnée par la matrice  $H = (0, 1)$ . Pour chaque  $x_0 \neq 0$  et chaque  $y_0$  dans  $\mathbb{R}$ , la solution de (1.55) avec la condition initiale  $(x_0, y_0)$  est définie sur  $[0, \frac{1}{2x_0^2})$  et s'écrit explicitement comme :

$$x(t) = x_0 \sqrt{\frac{1}{1 - 2tx_0^2}}, \quad x(0) = x_0, \quad (1.56)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{x_0} - \frac{\sqrt{1 - 2tx_0^2}}{x_0}, \quad y(0) = y_0. \quad (1.57)$$

Donc pour tout  $t$  dans  $[0, \frac{1}{2x_0^2})$ ,  $x_0$  peut être obtenu à partir de  $y(t)$ . Ceci démontre l'observabilité. En effet,  $y(t) - y_0$  est une fonction continue et croissante de  $x_0$ . Mais  $y(t)$  est bornée sur  $[0, \frac{1}{2x_0^2})$ , alors que  $x(t)$  ne l'est pas. ■

Aussi, supposons que le modèle (1.53) satisfait :

**Hypothèse GB (Bornitude Globale)** (1.58)

*Il existe une fonction  $C^1$   $V$  positive et propre telle que :*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -W(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.59)$$

Cette hypothèse implique que toutes les solutions du modèle (1.53) sont bornées.

L'origine de notre caractérisation GUEC est que, quand (1.53) est considéré comme notre modèle pour le système (1.51), il est supposé que le champ de vecteurs  $f$  du modèle (1.53) satisfait :

$$\frac{\partial H}{\partial X}(X, t) F(X, t) + \frac{\partial H}{\partial t}(X, t) = f(H(X, t)) \quad \forall (X, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+. \quad (1.60)$$

Malheureusement, à cause d'approximation, incertitudes, ..., (1.60) n'est typiquement pas satisfaite. C'est pourquoi nous devons quantifier l'écart de (1.60) ou en d'autres termes, caractériser la distance entre notre modèle (1.53) et le système actuel (1.51).

Pour atteindre notre objectif, nous introduisons une nouvelle fonction et deux suites de nombres positifs de la façon suivante :

**(H)** Il existe une fonction réelle positive continue  $\Upsilon$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\Upsilon(0) = 0$ , qui satisfait la propriété suivante :

il existe deux suites croissantes de nombres réels positifs  $\{u_i\}_{i \geq 0}$  et  $\{v_i\}_{i \geq 0}$  telles que :

$$0 \leq u_0 < v_0 < \dots < u_i < v_i < u_{i+1} < \dots, \quad u_i \rightarrow +\infty \quad (1.61)$$

et :

$$W(x) \geq \sup_{y \in E_x} \Upsilon(y) \quad \forall x : V(x) \in [u_i, v_i] \quad (1.62)$$

où  $E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : V(y) \leq V(x)\}$ .

Cette hypothèse technique traduit la propriété que  $W$  doit dominer  $\Upsilon$  sur certains ensembles de niveau de  $V$ . Elle est vérifiée par exemple dans les deux cas suivants :

1– il existe une fonction positive et continue  $\alpha$ , avec  $\alpha(0) = 0$ , qui est croissante sur  $[v_0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}_+$  et satisfait : pour tous les  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\alpha(V(x)) \leq W(x) \quad \text{et} \quad \Upsilon(x) := \alpha(V(x)) .$$

2– pour tous les  $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\Upsilon(y) \leq W(x)$  si  $V(y) \leq V(x)$ .

Avec les fonctions  $V$ ,  $W$  et  $\Upsilon$  satisfaisant (1.59)-(1.62), nous avons maintenant ce qu'il nous faut pour proposer une caractérisation des effets non modélisés.

### Hypothèse GUEC (Caractérisation Globale des Effets Non-modélisés) (1.63)

Il existe deux nombres réels positifs  $\mu_1, \mu_2$  tels que, quel que soit  $X_0 \in \Omega$ , pour chaque solution maximale de (1.51)  $X : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$  avec la condition initiale  $X(0) = X_0$  et l'intervalle semi-ouvert maximal à droite  $[0, T)$ , il existe un nombre réel positif  $D$  satisfaisant :  $\forall t \in [0, T)$ ,

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| \leq \mu_1 W(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon(x(s)) + D \quad (1.64)$$

où  $x(t) = H(X(t), t)$ .

On appellera dorénavant *signal de comparaison* le signal défini par :

$$r := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \Upsilon(x(\tau)) . \quad (1.65)$$

Il est important de noter les deux propriétés intrinsèques de cette caractérisation :

(P1) *Invariance par difféomorphisme* : l'équation (1.64) est indépendante du système de coordonnées du modèle. Précisément, pour chaque difféomorphisme global  $\varphi$ , (1.64) est satisfaite avec la nouvelle variable du modèle  $\chi = \varphi(x)$ .

(P2) *Invariance sous les transformations convexes* : Dans le cas où il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $K_\infty$  telle que

$$\Upsilon(x) \leq \alpha(V(x)) \leq W(x) ,$$

pour chaque fonction  $\psi$  convexe, définie positive et de classe  $C^1$ , Hypothèse GUEC est satisfaite avec la nouvelle fonction de Lyapunov  $\psi(V)$ .

En effet, dans le nouveau système de coordonnées  $\chi = \varphi(x)$ , le modèle (1.53) est transformé en :

$$\dot{\chi} = \varphi'(\varphi^{-1}(\chi))f(\varphi^{-1}(\chi)) := \bar{f}(\chi) \quad (1.66)$$

avec  $\varphi'$  représente ici la dérivée de  $\varphi$ . Donc GB (1.58) est satisfaite par (1.66) avec :

$$\bar{V}(\chi) = V(\varphi^{-1}(\chi)) , \quad \bar{W}(\chi) = W(\varphi^{-1}(\chi)) ,$$

en d'autres termes, nous avons :

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \chi}(\chi) \bar{f}(\chi) = \bar{W}(\chi) \leq 0 , \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^n .$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial \bar{V}}{\partial \chi}(\chi(t)) [\dot{\chi}(t) - \bar{f}(\chi(t))] \right| &= \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x)(\varphi^{-1})'(\chi) [\dot{x} - \varphi'(\varphi^{-1}(\chi))f(\varphi^{-1}(\chi))] \right|, \\
&= \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| \\
&\leq \mu_1 W(\varphi^{-1}(\chi)(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \bar{\Upsilon}(\chi(s)) + D \quad (1.67)
\end{aligned}$$

ce qui démontre (P1) avec  $\bar{\Upsilon}(\chi) := \Upsilon(\varphi^{-1}(\chi))$ . De plus, il est direct de vérifier que ce nouveau triplet de fonctions  $(\bar{V}, \bar{\Upsilon}, \bar{W})$  vérifie encore la propriété (H).

En ce qui concerne (P2), (1.53) satisfait GB (1.58) avec  $V$  et  $W$  remplacées par :

$$V_0(x) = \psi(V(x)), \quad W_0(x) = \psi'(V(x))W(x).$$

Puisque nous avons ici l'inégalité suivante :

$$\Upsilon(x) \leq \alpha(V(x)) \leq W(x),$$

pour chaque  $D \geq 0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe un nombre réel positif  $D_0$  tel que :

$$D\psi'(V(x)) \leq \varepsilon\psi'(V(x))W(x) + D_0.$$

Par conséquent, nous avons succesivement :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial V_0}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| &= \left| \psi'(V(x(t))) \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right|, \\
&\leq \mu_1 W_0(x(t)) + \mu_2 \psi'(V(x(t))) \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon(x(s)) + D\psi'(V(x)) \\
&\leq (\mu_1 + \varepsilon)W_0(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \{\psi'(V(x(s)))\Upsilon(x(s))\} + D_0 \\
&\leq (\mu_1 + \varepsilon)W_0(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon_0(x(s)) + D_0 \quad (1.68)
\end{aligned}$$

ce qui démontre la propriété (P2) avec :

$$\Upsilon_0(x) = \psi'(V(x))\Upsilon(x).$$

De plus, il est direct de vérifier que ce nouveau triplet de fonctions  $(V_0, \Upsilon_0, W_0)$  vérifie encore la propriété (H).

En introduisant le signal de comparaison  $r$ , nous cherchons à autoriser des dynamiques non modélisées en plus d'incertitudes statiques. Remarquons que si  $r$  n'était pas présent, il serait suffisant comme d'habitude de vérifier (1.64) seulement point par point dans l'espace d'états étendus  $(X, t)$ . Mais, dû à la présence de  $r$ , (1.64) devient une hypothèse à vérifier solution par solution, et donc la vérification de (1.64) est souvent une tâche difficile. Par contre, (1.64) peut être vérifiée en ligne dans le cas où  $\dot{x}$  est mesuré. Si  $\dot{x}$  n'est pas mesuré, on peut remplacer (1.64) par sa version intégrale suivante :  $\forall 0 \leq s \leq t < T$

$$\left| V(x(t)) - V(x(s)) - \int_s^t \frac{\partial V}{\partial x}(x(\tau))f(x(\tau))d\tau \right| \quad (1.69)$$

$$\leq \mu_1 \int_s^t W(x(\tau)) d\tau + \mu_2 \int_s^t \sup_{0 \leq \tau' \leq \tau} \Upsilon(x(\tau')) d\tau + D(t-s) .$$

Ceci nous permet de nous passer de la mesure de  $X$ . Notons finalement que, à l'aide des propriétés des systèmes considérés, il est souvent possible de la vérifier *sans* la connaissance explicite des solutions (voir le paragraphe 1.1.3).

Le signal  $r$  peut être vu comme la norme  $L^\infty$  d'un "opérateur" mais avec une entrée spécifique  $\Upsilon$  liée à la "marge de stabilité" du modèle et d'une sortie plus spécifique (multiplication par  $\frac{\partial V}{\partial x}$ ). Pour aller plus loin, nous allons comparer l'hypothèse GUEC (1.63) avec l'approche SpES en supposant que  $\mu_1$  est dans  $(0, 1)$  et nous sommes dans le cas particulier suivant de l'hypothèse (H) : il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $K_\infty$  telle que

$$\Upsilon(x) \leq \alpha(V(x)) \leq W(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n . \quad (1.70)$$

Dans ce cas, GUEC (1.63) et GB (1.58) donnent :

$$\dot{V} \leq -(1 - \mu_1)W(x(t)) + \mu_2 \sup_{\tau \in [0, t]} \{\Upsilon(x(\tau))\} + D . \quad (1.71)$$

Soit  $\mu$  un nombre réel arbitraire dans  $(0, 1 - \mu_1)$ . Vu (1.70), (1.71) se réécrit comme :

$$\dot{V} \leq -\mu\alpha(V(x(t))) - \left[ (1 - \mu_1 - \mu)\alpha(V(x(t))) - \mu_2 \sup_{\tau \in [0, t]} \{\Upsilon(x(\tau))\} - D \right] \quad (1.72)$$

A partir de (1.72), nous allons démontrer que l'"opérateur" <sup>5</sup> entrée sortie  $\Upsilon \rightarrow \alpha(V)$  ayant  $x$  comme état est SpES avec le gain  $\gamma_1$  défini dans (1.75). Notons d'abord que cet "opérateur" vérifie la propriété ONB puisque  $\alpha$  et  $V$  sont propres. Puis, en appliquant l'algorithme de Sontag [70, Proof of Theorem 1] à (1.72), nous obtenons :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \beta_1(\alpha(V(x(0))), t) + \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [0, t]} \{\Upsilon(x(\tau))\} \right) + D_1 \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.73)$$

où  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  et  $D_1$  sont définies par :

$$\begin{aligned} \eta(s) &:= - \int_1^s \frac{d\tau}{\mu\alpha(\tau)} \quad \forall s > 0 , \\ \bar{\beta}(s, t) &:= \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{si } s > 0 \text{ et } t + \eta(s) \geq \lim_{s \rightarrow 0+} \eta(s) \\ \eta^{-1}(t + \eta(s)) & \text{si } s > 0 \text{ et } t + \eta(s) < \lim_{s \rightarrow 0+} \eta(s) \end{cases} \\ \beta_1(s, t) &:= \alpha(\bar{\beta}(\alpha^{-1}(s), t)) + \frac{s}{1+t} , \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ , \end{aligned} \quad (1.74)$$

et, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\gamma_1(s) := \frac{\mu_2}{1 - \mu_1 - \mu} s , \quad (1.75)$$

$$D_1 := \frac{D}{1 - \mu_1 - \mu} . \quad (1.76)$$

---

<sup>5</sup>Faute de mieux, cette terminologie est utilisée par abus. Néanmoins, ceci ne gêne pas d'établir les deux équations essentielles (1.73) et (1.77) auxquelles le théorème 1.9 s'applique pour obtenir notre résultat.

D'autre part, il est clair que  $\alpha(V) \rightarrow \Upsilon$  satisfait ONB et vérifie la propriété SES avec le gain linéaire  $\gamma_2 := \text{Id}$ , i.e. :

$$\Upsilon(x(t)) \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\alpha(V(x(\tau)))\} . \quad (1.77)$$

On s'aperçoit que le gain  $\gamma_1$  dans (1.75) et le gain  $\gamma_2 = \text{Id}$  satisfont la condition du petit gain (1.41) dans le théorème 1.9, pourvu que :

$$\frac{\mu_2}{1 - \mu_1 - \mu} < 1 . \quad (1.78)$$

Puisque  $\mu$  est arbitraire dans  $(0, 1 - \mu_1)$ , la condition (1.78) est équivalente à :

$$1 - \mu_1 - \mu_2 > 0 . \quad (1.79)$$

Donc en appliquant le théorème 1.9 avec (voir la Remarque 1.6) :

$$x_1 = x , \quad y_1 = \alpha(V(x)) , \quad x_2 = x , \quad y_2 = \Upsilon(x) ,$$

nous avons la proposition suivante :

**Proposition 1.1** *Sous les hypothèses OE (1.54) , GB (1.58) et GUEC (1.63) , si pour une certaine fonction  $\alpha$  de classe  $K_\infty$ , nous avons :*

$$1 - \mu_1 - \mu_2 > 0 , \quad (1.80)$$

$$\Upsilon(x) \leq \alpha(V(x)) \leq W(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n , \quad (1.81)$$

alors chaque solution  $X(t)$  de (1.51) avec la condition initiale  $X(0) \in \Omega$  est bien définie sur  $[0, +\infty)$ , unique et bornée. De plus, s'il existe un nombre réel positif  $t_\star$  tel que, quels que soit  $t_\star \leq t_0 \leq t$ , nous avons :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| \leq \mu_1 W(x(t)) + \mu_2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \{\Upsilon(x(s))\} , \quad (1.82)$$

alors la fonction  $V(x(t))$  converge vers zéro quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

*Preuve :* voir Appendice B. □

Pour le cas moins restrictif où, au lieu de (1.81), nous avons l'hypothèse (H), nous avons le résultat suivant :

**Proposition 1.2 (Bornitude Globale) :** *Supposons que OE (1.54) et GB (1.58) sont vérifiées. Si, pour une certaine fonction  $\Upsilon$  satisfaisant l'hypothèse (H), l'hypothèse GUEC (1.63) est satisfaite avec  $\mu_1, \mu_2$  satisfaisant :*

$$1 - \mu_1 - \mu_2 > 0 , \quad (1.83)$$

alors chaque solution  $X(t)$  de (1.51) avec la condition initiale  $X(0) \in \Omega$ , dont le nombre réel positif associé  $D$  dans GUEC (1.63) satisfait :

$$D < (1 - \mu_1 - \mu_2) \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} W(x) , \quad (1.84)$$

est bien définie sur  $[0, +\infty)$ , unique et bornée. De plus, s'il existe une fonction  $\alpha$  de classe  $K$  telle que

$$\Upsilon(x) \leq \alpha(V(x)) \leq W(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n , \quad (1.85)$$

alors pour chaque solution, satisfaisant pour tous les  $t_0 \geq 0$ ,

$$\max \left\{ 0, \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| - \mu_1 W(x(t)) - \mu_2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \{\Upsilon(x(s))\} \right\} \rightarrow 0 \quad (1.86)$$

quand  $t - t_0$  tend vers  $+\infty$ , la fonction  $V(x(t))$  converge vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

*Preuve :* voir Appendice B. □

Nous remarquons que  $D$  peut dépendre de la solution et donc des conditions initiales. Ceci va causer une difficulté pour l'analyse globale. Cependant, quand  $W$  est propre, (1.84) est trivialement satisfaite. Dans ce cas, il n'y a pas de contrainte sur la condition initiale  $X(0)$  donnée implicitement par  $D$ . La satisfaction de (1.86) impliquera l'existence d'une fonction positive  $D(t_0, t)$  qui satisfait une équation similaire à (1.64) et la convergence vers 0 quand  $t - t_0 \rightarrow \infty$ .

Pour terminer ce paragraphe, nous signalons les points suivants qui rendent la Proposition 1.2 plus générale que la Proposition 1.1 :

1. Pour conclure la bornitude globale des solutions, on n'exige que la propriété (H) entre le triplet de fonctions  $(V, W, \Upsilon)$  dans la Proposition 1.2, à savoir que (1.81) dans la Proposition 1.1 implique automatiquement (H).
2. Pour obtenir la convergence asymptotique de  $V(x(t))$ , on a besoin de l'uniformité de GUEC (1.63) par rapport à l'instant initial  $t_0$  avec  $D = 0$  dans la Proposition 1.1. Mais dans la Proposition 1.2, on n'a besoin de l'uniformité de GUEC (1.63) qu'avec le fait que  $D(t_0, t)$  tend vers 0 quand  $t - t_0$  tend vers  $+\infty$ . Aussi, (1.85) est satisfaite seulement avec une fonction  $\alpha$  de classe  $K$  (non  $K_\infty$ !).

Par contre, le prix de ces généralisations de la Proposition 1.2 par rapport à la Proposition 1.1 est que, aucun résultat de stabilité (au sens de Lyapunov) a été obtenu dans la Proposition 1.2. En revanche, la possibilité d'avoir un résultat de stabilité existe dans la Proposition 1.1 puisque la dernière est une conséquence du théorème du petit gain 1.9 (voir Exemple 1.3).

**Notes bibliographiques.** La synthèse de commande robuste dépend de la caractérisation des effets non modélisés choisie. La caractérisation GUEC généralise des récentes approches dans la littérature (voir par exemple [5], [12], [19]) au sens suivant : (1) permettre de capturer des dynamiques incertaines en introduisant le signal de comparaison  $r$ ; (2) avoir une généralité académique à travers l'introduction des ensembles de niveau d'une fonction de Lyapunov du modèle dans (H).

### 1.2.3 Exemples illustratifs

Dans ce paragraphe, à l'aide de trois exemples, nous illustrons les hypothèses et les résultats qui ont été présentés dans les paragraphes précédents.

**Exemple 1.3 :** Considérons le système nonlinéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \omega(x, z) \\ \dot{z} &= h(z, x) \end{cases} \quad (1.87)$$

où  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $f$ ,  $h$  et  $\omega$  sont trois fonctions régulières telles que :

$$f(0) = 0, \quad \omega(0, 0) = 0, \quad h(0, 0) = 0.$$

Nous faisons les hypothèses suivantes sur le système (1.87) :

(A1) Le sous-système  $\dot{z} = h(z, x)$  est ISS avec  $x$  comme entrée et une paire de fonctions  $(\beta, \gamma)$ .

(A2) Il existe une fonction  $C^1 V : \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , trois fonctions  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  de classe  $K_\infty$  telles que, pour chaque  $x$  dans  $\mathbb{R}^{n_1}$ ,

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) = -W(x) \leq -\alpha_3(V(x)) .$$

Ceci signifie que l'origine est une solution globalement asymptotiquement stable de  $\dot{x} = f(x)$ .

(A3) Le terme couplé  $\omega(x, y)$  est restreint de la façon suivante :

il existe trois fonctions réelles positives  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  et trois nombres réels positifs  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  satisfaisant que  $\gamma_3$  est non décroissante et :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 < 1 \quad (1.88)$$

$$\gamma_3 \circ 2\gamma(a) \leq \alpha_3 \circ \alpha_1(a) \quad \forall a \geq 0 \quad (1.89)$$

$$|\omega(x, z)| \leq \gamma_1(|x|) + \gamma_2(|z|) \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} \quad (1.90)$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right| \gamma_1(|x|) \leq \varepsilon_1 W(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_1} \quad (1.91)$$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right| \gamma_2(|z|) \leq \varepsilon_2 W(x) + \varepsilon_3 \gamma_3(|z|) \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^{n_1+n_2} . \quad (1.92)$$

Notons que les équations (1.91) et (1.92) peuvent être en général obtenues par l'inégalité de Young (voir [22]), comme dans l'exemple 1.4.

Nous voulons montrer :

d'une part que, sous ces hypothèses (A1) à (A3), en trouvant des sorties convenables pour les deux sous systèmes de (1.87), chaque sous système est SES et une condition du petit gain est vérifiée. Donc le théorème 1.9 s'applique à (1.87).

D'autre part, ces hypothèses (A1)-(A3) impliquent la satisfaction des propriétés OE (1.54) , GB (1.58) et GUEC (1.63) et donc la proposition 1.2 s'applique à ce système. Avec cet exemple, nous montrons aussi l'utilisation de la condition du petit gain et/ou de l'hypothèse GUEC (1.63) dans le problème de stabilisation globale d'une classe de systèmes nonlinéaires interconnectés.

Selon l'hypothèse (A2), vu les équations (1.90), (1.91) et (1.92), la dérivée de la fonction  $V$  donnée par (A2), le long des solutions de (1.87), vérifie :

$$\dot{V} \leq -(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)W(x) + \varepsilon_3 \gamma_3(|z|) \quad (1.93)$$

où les  $\varepsilon_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) sont donnés par (A3). Puisque  $V$  et  $W$  satisfont :

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \text{et} \quad \alpha_3(V(x)) \leq W(x) ,$$

en appliquant l'algorithme de Sontag [70, Proof of Theorem 1] à (1.93), nous obtenons une fonction  $\beta_x$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma_x$  de classe  $K$  satisfaisant l'équation suivante :

$$\alpha_3(V(x(t))) \leq \beta_x(\alpha_3(V(x(0))), t) + \gamma_x \left( \sup_{\tau \in [0, t]} \{\gamma_3(|z(\tau)|)\} \right) . \quad (1.94)$$

$\beta_x$  ne jouant aucun rôle dans la suite, nous donnons uniquement l'expression de  $\gamma_x$  :

$$\gamma_x(s) = \frac{\varepsilon_3}{\delta} s \quad \forall s \geq 0 \quad (1.95)$$

où  $\delta$  est un nombre réel quelconque dans  $(0, 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$  (voir (1.88)). Le sous système  $x$  peut être vu comme un système SES avec  $\gamma_3(|z|)$  comme entrée et  $\alpha_3(V(x))$  comme sortie. Grâce à l'hypothèse (A1), nous avons :

$$\gamma_3(|z(t)|) \leq \gamma_3 \circ 2\beta(|z(0)|, t) + \gamma_z \left( \sup_{0 \leq s \leq t} \{\alpha_3(V(x(s)))\} \right) \quad (1.96)$$

où l'on a utilisé [70, eq. (12)] et  $\gamma_z$ , de classe  $K$ , est définie par :

$$\gamma_z(s) = \gamma_3 \circ 2\gamma \circ \alpha_1^{-1} \circ \alpha_3^{-1}(s) \quad \forall s \geq 0. \quad (1.97)$$

D'après (1.89), nous avons :  $\gamma_z(s) \leq s \forall s \geq 0$ . La condition (1.41) du théorème 1.9 donne donc, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $\gamma_x \circ (1 + \varepsilon)\gamma_z \leq 1 - \varepsilon$ , soit ici  $\varepsilon_3(1 + \varepsilon)/\delta \leq 1 - \varepsilon$ , ce qui donne :

$$\varepsilon_3(1 - \varepsilon) \leq (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

qui n'est rien d'autre que (1.88). Donc, en utilisant le théorème du petit gain 1.9, nous concluons que l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.87) est globalement asymptotiquement stable (GAS).

En résumé, nous avons montré le résultat suivant.

**Proposition 1.3** *Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3), l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.87) est GAS.*

Démontrons maintenant que les hypothèses OE (1.54), GB (1.58) et GUEC (1.63) sont vérifiées. Remarquons d'abord que dans (1.87),  $N = n_1 + n_2$ ,  $n = n_1$  et

$$X = (x, z)^\top, \quad H = (I_{n_1 \times n_1}, 0_{n_1 \times n_2}), \quad \Omega = \mathbb{R}^{n_1 + n_2},$$

et (1.52) est trivialement satisfaite.

En prenant le système

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.98)$$

pour le modèle du système (1.87), nous avons :

**Lemme 1.12** : *Sous les hypothèses A1, A2, A3, les hypothèses OE, GB et GUEC sont satisfaites.*

*Preuve* : Remarquons premièrement qu'en raison de l'hypothèse (A2), le modèle (1.98) satisfait la propriété GB. Ensuite, OE est une conséquence directe de (A1). Enfin, soit  $(x(t), z(t))$  une solution de (1.87) définie maximale sur son intervalle semi-ouvert  $[0, T)$ . D'après (A1)-(A3), nous obtenons, pour tous les  $t \in [0, T)$  (vu [70, eq. (12)]) :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) \omega(x(t), z(t)) \right| \\ & \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)W(x(t)) + \varepsilon_3\gamma_3(|z(t)|) \\ & \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)W(x(t)) + \varepsilon_3\alpha_3 \left( \sup_{0 \leq s \leq t} V(x(s)) \right) + \varepsilon_3\gamma_3(2\beta(|z(0)|, t)). \end{aligned}$$

Ceci implique GUEC (1.63) pour le système (1.87).  $\square$

La proposition suivante est la conséquence directe du Lemme 1.12 et de la Proposition 1.2.



**Proposition 1.4** *Sous les hypothèses (A1), (A2) et (A3), toutes les solutions  $(x(t), z(t))$  de (1.87) sont bien définies sur  $[0, +\infty)$ , bornées, et satisfont :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (|x(t)| + |z(t)|) = 0 .$$

■

**Exemple 1.4 (Systèmes presque homogènes) :**

Les hypothèses (A1), (A2) et (A3) sont vérifiées par les systèmes presque homogènes d'ordre  $\lambda \geq 1$  (voir, par exemple, [3], [4], [14]), à condition que :

(1)  $f$  et  $h$  soient deux champs de vecteurs réguliers, homogènes d'ordre  $\lambda \geq 1$ , i.e. :

$$f(cx) = c^\lambda f(x) , \quad h(cx, cz) = c^\lambda h(x, z) , \quad \forall c \in \mathbb{R} . \quad (1.99)$$

(2) L'équilibre  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x)$  et l'équilibre  $z = 0$  de  $\dot{z} = h(z, 0)$  soient globalement asymptotiquement stables;

(3)  $|\omega(x, z)| \leq \epsilon_1 |x|^\lambda + \epsilon_2 |z|^\lambda$ , pour deux nombres réels  $\epsilon_1 \geq 0$  et  $\epsilon_2 \geq 0$ . Notons que  $\omega$  peut contenir des nonlinéarités non-homogènes telles  $\omega(x, y) = xy^{\lambda-1} \sin(x^2)$ .

En effet, d'après [20, Theorem 57.4], il existe une fonction de Lyapunov  $V_1(z)$  homogène d'ordre  $\mu_1$  pour le système homogène stationnaire  $\dot{z} = h(z, 0)$  telle que, pour trois nombres réels  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  et  $c_3 > 0$ ,

$$c_1 |z|^{\mu_1} \leq V_1(z) \leq c_2 |z|^{\mu_1} \quad (1.100)$$

et :

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(z) h(z, 0) \leq -c_3 |z|^{\mu_1 + \lambda - 1} , \quad \forall z . \quad (1.101)$$

Notons que :

- $\frac{\partial V_1}{\partial z}(z)$  est homogène d'ordre  $\mu_1 - 1$ .

En effet, puisque  $V_1(z)$  est homogène d'ordre  $\mu_1$ , nous avons :

$$V_1(cz) = c^{\mu_1} V_1(z) , \quad \forall c \in \mathbb{R} .$$

En dérivant par rapport à  $z$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(cz) = c^{\mu_1 - 1} \frac{\partial V_1}{\partial z}(z) .$$

- $\frac{h(z, x) - h(z, 0)}{|x|}$  est homogène d'ordre  $\lambda - 1$ , puisque  $h$  est homogène d'ordre  $\lambda$ .
- puisque  $\frac{\partial V_1}{\partial z}(z)$  est bornée sur la sphère unité  $\{z \mid |z| = 1\}$ , il existe un nombre réel strictement positif  $d_1$  tel que :

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(z) = |z|^{\mu_1 - 1} \frac{\partial V_1}{\partial z}(z/|z|) \leq d_1 |z|^{\mu_1 - 1} \quad \forall z . \quad (1.102)$$

- puisque  $\frac{h(z, x) - h(z, 0)}{|x|}$  est bornée sur la sphère  $\{(x, z) \mid |x|^{\lambda-1} + |z|^{\lambda-1} = 1\}$ , il existe un nombre réel strictement positif  $d_2$  tel que :

$$\frac{h\left(\frac{z}{\rho}, \frac{x}{\rho}\right) - h\left(\frac{z}{\rho}, 0\right)}{\left|\frac{x}{\rho}\right|} \leq d_2 \quad \forall x, z \quad (1.103)$$

où  $\rho := (|x|^{\lambda-1} + |z|^{\lambda-1})^{1/(\lambda-1)}$  si  $\lambda > 1$ , et  $\rho := 1$  si  $\lambda = 1$ .

Alors, (1.101), (1.102) et (1.103) donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial z}(z)h(z, x) &= \frac{\partial V_1}{\partial z}(z)h(z, 0) + \frac{\partial V_1}{\partial z}(z)[h(z, x) - h(z, 0)] \\ &\leq -c_3|z|^{\mu_1+\lambda-1} + d_1d_2|x|(|x|^{\lambda-1} + |z|^{\lambda-1})|z|^{\mu_1-1}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Avec l'inégalité de Young (voir Section B.0), (1.104) implique l'existence de deux nombres réels positifs  $c_4$  et  $c_5$  tels que :

$$\frac{\partial V_1}{\partial z}(z)h(z, x) \leq -|z|^{\mu_1-1}(c_4|z|^\lambda - c_5|x|^\lambda). \quad (1.105)$$

Selon l'algorithme présenté dans [70, Proof of Theorem 1], vu (1.100), (1.105) implique l'existence d'une fonction  $\beta$  de classe  $KL$  et une constante positive  $k$  telle que

$$|z(t)| \leq \beta(|z(0)|, t) + k \sup_{[0, t]} \{|x(s)|\} \quad (1.106)$$

i.e. l'hypothèse (A1) est satisfaite pour la fonction  $\gamma$  définie par  $\gamma(s) = ks$ .

D'autre part, il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$  homogène d'ordre  $\mu$  pour le système homogène stationnaire  $\dot{x} = f(x)$  telle que pour une certaine constante  $c > 0$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) \leq -c|x|^{\mu+\lambda-1}. \quad (1.107)$$

Donc il existe trois constantes positives  $l_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) telles que l'hypothèse (A2) soit satisfaite avec :

$$\alpha_1(|x|) = l_1|x|^\mu, \quad \alpha_2(|x|) = l_2|x|^\mu, \quad \alpha_3(v) = l_3v^{\frac{\mu+\lambda-1}{\mu}}. \quad (1.108)$$

Finalement, l'hypothèse (A3) est vérifiée avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= k_1\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{k_1(\mu-1)}{c(\mu+\lambda-1)}\varepsilon_2, \quad \varepsilon_3 = \frac{k_1\lambda(2k)^{\mu+\lambda-1}}{(\mu+\lambda-1)l_3l_1^{(\mu+\lambda-1)/\mu}}\varepsilon_2 \\ \gamma_1(s) &:= \varepsilon_1s^\lambda, \quad \gamma_2(s) := \varepsilon_2s^\lambda, \quad \gamma_3(s) := l_3l_1^{(\mu+\lambda-1)/\mu}(2k)^{1-\mu-\lambda}s^{\mu+\lambda-1} \end{aligned}$$

où  $k_1 > 0$  ne dépend que de  $V$ .

En conclusion, d'après la Proposition 1.3, la solution nulle du système (1.87) est GAS. ■

**Exemple 1.5 :** Considérons le système nonlinéaire commandé mais singulièrement perturbé :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - y \\ \dot{x}_2 &= u \\ \mu \dot{y} &= -\frac{y|y|^{\frac{1}{3}}}{(1+y^2)^{\frac{1}{2}}} + x_1 \end{cases} \quad (1.109)$$

où  $u \in \mathbb{R}$  est la commande,  $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  est une partie mesurée de l'état,  $y \in \mathbb{R}$  est la composante non mesurée de l'état et  $\mu$  est un nombre réel positif arbitraire inconnu.

Comme nous le verrons dans la Section 3.1.2 (voir aussi [30]), la caractérisation GUEC (1.63) va conduire pour proposer la commande :

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) &= -x_1 - \left(1 + 2x_1 - 3x_1^2 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1)\right)(x_2 + x_1^2 - x_1^3) \\ &\quad - (x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1)) - v_2(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1.110)$$

où  $v_1$  et  $v_2$ , de classe  $C^1$ , sont données par :

$$\left. \begin{aligned} v_1(x_1) &= c_1 x_1^3, \\ v_2(x_1, x_2) &= (x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1))^3 (1 + 2x_1 - 3(1 - c_1)x_1^2)^4 \\ &\quad + c_1(x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1))^3 \end{aligned} \right\} \quad (1.111)$$

où  $c_1$  est un paramètre à choisir plus grand que 4. Nous allons d'abord étudier ce système bouclé (1.109) au point de vue de la caractérisation GUEC, puis au point de vue de la caractérisation SpES.

• avec la caractérisation GUEC

Nous allons montrer que les hypothèses OE (1.54), GB (1.58), (H) et GUEC (1.63) sont vérifiées pour ce système (1.109), et donc la Proposition 1.2 s'applique pour conclure la bornitude globale des solutions.

Remarquons que le système (1.109) vérifie (1.51) en prenant  $N = 3$ ,  $n = 2$  et

$$X = (x_1, x_2, y)^\top, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \mathbb{R}^3.$$

Bien que la solution ordinaire  $y = 0$  du sous système  $y$  de (1.109) avec  $x_1 = 0$  admette une attraction plus faible qu'exponentielle à l'infini et près de l'origine, l'hypothèse OE (1.54) est vérifiée.

Nous choisissons le système différentiel ordinaire suivant comme modèle pour le système (1.109) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= u(x_1, x_2). \end{cases} \quad (1.112)$$

Comme il peut être directement vérifié, GB (1.58) est satisfaite par (1.112) avec les fonctions  $V$  et  $W$  définies par :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1))^2 \quad (1.113)$$

$$W(x_1, x_2) = 2V(x_1, x_2) + x_1 v_1(x_1) + [x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1)] v_2 \quad (1.114)$$

Il est assez facile de voir que si l'on prend  $\Upsilon(x) = 2c_1 V(x)^2$ , alors l'hypothèse (H) est vérifiée avec  $u_0 = 0$  et  $v_0 = +\infty$  dans (1.61).

Il reste maintenant à vérifier l'hypothèse GUEC (1.63) pour (1.109). L'erreur de modélisation entre le modèle (1.112) et (1.109) est égale à  $x_1^3 - y$ . Notons que  $v_1(x_1)$  et  $v_2(x_1, x_2)$  dans (1.111) satisfont les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 v_1(x_1) &\geq 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \quad v_1(0) = 0, \\ (x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1)) v_2(x_1, x_2) &\geq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ v_2(x_1, x_2) &= 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in \{(x_1, x_2) : x_2 + x_1 + x_1^2 - x_1^3 + v_1(x_1) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.115)$$

Aussi, on peut montrer directement que (voir [29, eq. (18)]) :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) (x_1^3 - y) \right| \leq \frac{1}{2}W(x_1, x_2) + \frac{3}{2}y^{4/3} \quad \forall (x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3. \quad (1.116)$$

Soit  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  une solution maximale définie sur  $[0, T)$  du système (1.109). Après de longs calculs, nous obtenons, pour tous les  $t \in [0, T)$ ,

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) (x_1^3(t) - y(t)) \right| \leq \mu_1 W(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon(x(s)) + D(t) \quad (1.117)$$

où  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $D(t)$  sont donnés par :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{2048}{27c_1}, \quad \Upsilon(x) = 2c_1 V(x)^2 \leq W(x) \quad (1.118)$$

et

$$D(t) = \beta_0(y(0)^{\frac{4}{3}}, t) + 48 \sup_{0 \leq s \leq \frac{3}{4}} \left\{ \left( \frac{s^2}{1-s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{4s}{3} \right)^2 \right\} \quad (1.119)$$

avec  $\beta_0(s, t)$  définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  comme :

$$\beta_0(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 8\mu s^{1/2} \\ \frac{3}{2}\phi^{-1}(t + \phi(s)) & \text{si } t < 8\mu s^{1/2} \end{cases} \quad (1.120)$$

où  $\phi(s) = -8\mu(s^{\frac{1}{2}} - 1)$ .

En conclusion, toutes les hypothèses de la proposition 1.2 sont remplies. Donc, en choisissant dans la commande  $c_1$  plus grand que 152, d'après la Proposition 1.2, pour tout nombre réel positif  $\mu$ , nous avons la bornitude (globale) de toutes les solutions du système (1.109).

Il faut remarquer qu'avec la même analyse, nous pouvons montrer que la Proposition 1.2 s'applique au système nonlinéaire régulièrement perturbé :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - x_1^3 + \mu y \\ \dot{x}_2 &= u(x_1, x_2) \\ \dot{y} &= -y + (1 + u(x_1, x_2)^2)^\sigma - 1 \end{cases} \quad (1.121)$$

avec  $\sigma \geq 0$  et  $u(x_1, x_2)$  définie dans (1.110). En effet, si l'on prend le même système (1.112) pour modèle de (1.121), la seule difficulté est de vérifier GUEC (1.63) pour ce système. Nous pouvons montrer (voir la Section 3.1.2) qu'une inégalité similaire à (1.117) est satisfaite par le système avec perturbation régulière (1.121), à condition que  $\sigma \leq \frac{3}{11}$ .

#### • avec la caractérisation SpES

En regardant (1.109) comme une interconnexion de deux sous systèmes  $(x_1, x_2)$  et  $y$ , nous montrons que la caractérisation SpES s'applique à (1.109).

Considérons d'abord le sous système  $(x_1, x_2)$  de (1.109) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - y \\ \dot{x}_2 &= u(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.122)$$

avec entrée  $y$  et sortie  $x_1^2/2$ . Avec les mêmes fonctions  $V$  et  $W$  définies dans (1.113) et (1.114), la dérivée temporelle de  $V$  le long des solutions de (1.122) s'écrit comme :

$$\dot{V} \leq -W(x_1, x_2) + \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1, x_2) (x_1^3 - y). \quad (1.123)$$

Vu (1.116) et (1.118), (1.123) implique :

$$\dot{V} \leq -c_1 V(x_1, x_2)^2 + \frac{3}{2} y^{4/3} . \quad (1.124)$$

En utilisant l'algorithme de Sontag relatif à la stabilité ISS à (1.124), nous montrons que pour chaque  $y(t)$  définie pour  $t \geq 0$  et essentiellement borné, la solution  $(x_1(t), x_2(t))$  de (1.122) est définie sur  $[0, +\infty)$  et bornée. De plus, en dénotant par  $\beta_1$  et  $\gamma_1$  respectivement la fonction de classe  $KL$  et la fonction de classe  $K$  comme suit :

$$\beta_1(s, t) := \frac{s}{1 + c_1 s t / 2} , \quad \gamma_1(s) := \left( \frac{3}{c_1} \right)^{1/2} s^{2/3} , \quad (1.125)$$

dû à la stationnarité, la solution  $(x_1(t), x_2(t))$  satisfait que, pour  $0 \leq t_0 \leq t < +\infty$ ,

$$V(x_1(t), x_2(t)) \leq \beta_1(V(x_1(t_0), x_2(t_0)), t - t_0) + \gamma_1 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |y(\tau)| \right) . \quad (1.126)$$

Puisque, par ailleurs,  $x_1^2/2 < V(x_1, x_2)$ , nous avons établi que le sous système (1.122) d'état  $(x_1, x_2)$ , entrée  $y$ , sortie  $x_1^2/2$  est SES avec le gain  $\gamma_1(s)$  défini dans (1.125).

Ensuite, considérons le sous-système  $y$  de (1.109), i.e. :

$$\mu \dot{y} = - \frac{y|y|^{1/3}}{(1 + y^2)^{1/2}} + x_1 \quad (1.127)$$

avec entrée  $x_1^2/2$  et sortie  $y$ . Nous avons :

$$\frac{\dot{y}}{y^{4/3}} = - \frac{1}{2\mu} \times \frac{4|y|y^{2/3}}{3(1 + y^2)^{1/2}} + \frac{2|y|^{1/3}}{3\mu} \left[ - \frac{y^{4/3}}{(1 + y^2)^{1/2}} + 2|x_1| \right] . \quad (1.128)$$

Puisque la fonction  $x/(1 + x)$  est continue et strictement croissante en  $x \geq 0$ , les fonctions suivantes

$$\frac{1}{2\mu} \times \frac{4|y|y^{2/3}}{3(1 + y^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \frac{y^{4/3}}{(1 + y^2)^{1/2}}$$

sont deux fonctions de classe  $K_\infty$  en  $|y|$ . Dénotons par  $\gamma_0$  la fonction de classe  $K_\infty$  :

$$\gamma_0(s) = \frac{s^{4/3}}{(1 + s^2)^{1/2}} , \quad \forall s \geq 0 . \quad (1.129)$$

En utilisant l'algorithme de Sontag relatif à la stabilité ISS à (1.128), on peut montrer l'existence d'une fonction  $\beta_2$  de classe  $KL$  telle que, pour chaque signal  $x_1(t)$  défini sur  $[0, \infty)$  et essentiellement borné, la solution  $y(t)$  de (1.127) est définie sur  $[0, \infty)$  et satisfait :

$$|y(t)| \leq \beta_2(|y(0)|, t) + \gamma_0^{-1} \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ 2^{3/2} \left( \frac{x_1^2(\tau)}{2} \right)^{1/2} \right\} \right) \quad \forall t \geq 0 . \quad (1.130)$$

Donc, le sous système (1.127) d'état  $y$ , entrée  $x_1^2/2$ , sortie  $y$  est SES avec le gain

$$\gamma_2(s) := \gamma_0^{-1}(2s) . \quad (1.131)$$

Quand  $s$  est assez grand,  $\gamma_0$ , définie dans (1.129), est équivalente à  $s^{1/3}$ , à un facteur multiplicatif près. Plus précisément, il existe deux constantes positives  $k_1 > 0$  et  $k_2 \geq k_1$  telles que :

$$k_1 s^{1/3} \leq \gamma_0(s) \leq k_2 s^{1/3}, \quad \forall s \gg 0. \quad (1.132)$$

Donc il existe une constante  $k > 0$  telle que  $\gamma_2$  satisfait :

$$\gamma_2(s) \leq k s^{3/2}, \quad \forall s \gg 0. \quad (1.133)$$

Par conséquent, vu (1.133), (1.125), nous avons :

$$\gamma_2 \circ 2\gamma_1(s) \leq \frac{k 2^{3/2} \times 3^{3/4}}{c_1^{3/4}} s, \quad \forall s \gg 0. \quad (1.134)$$

Donc, lorsque  $c_1$  est assez grand, il existe deux nombres réels positifs  $\lambda < 1$  et  $d$  tels que :

$$\gamma_2 \circ 2\gamma_1(s) \leq \lambda s + d, \quad \forall s \geq 0. \quad (1.135)$$

C'est-à-dire que la condition du petit-gain entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est vérifiée. Ainsi le théorème du petit gain généralisé 1.9 nous permet de conclure que toutes les solutions  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  de (1.109) sont définies sur  $[0, +\infty)$  et bornées.

Remarquons que, bien que les sous systèmes  $(x_1, x_2)$  et  $y$  de (1.109) soient ISS par rapport à leur entrée  $y$  et  $(x_1, x_2)$  respectivement, on n'a pas pu conclure la stabilité asymptotique. La raison est qu'il est impossible d'obtenir (1.135) avec  $d = 0$  pour le système (1.109). En effet, lorsque  $s$  est suffisamment petit,  $\gamma_0(s)$  est équivalente à  $s^{4/3}$ , à un facteur multiplicatif près. Donc il existe un nombre réel positif  $k_3$  tel que  $\gamma_2$  définie dans (1.131) satisfait :

$$\gamma_2(s) \geq k_3 s^{3/8}, \quad \forall s \approx 0. \quad (1.136)$$

Ceci implique immédiatement que, pour  $s$  assez petit mais positif,

$$\gamma_2 \circ \gamma_1(s) \geq \frac{k_3 3^{3/16}}{c_1^{3/16}} s^{1/4}, \quad \forall s \approx 0. \quad (1.137)$$

Si bien que la propriété (1.135) ne peut pas être vérifiée avec  $d = 0$ . ■

A travers ces exemples, nous avons pu constater que, le théorème du petit gain généralisé 1.9 est un outil important pour l'étude de stabilité d'un système interconnecté, et repose sur une condition du petit gain qui relie les gains  $\gamma_i$  des deux sous systèmes. Donc nous avons besoin de connaître *explicitement* les  $\gamma_i$  dont les calculs sont par contre souvent très délicats.

### 1.3 Caractérisations plus récentes: cas local

L'objectif de cette section est d'étudier les versions locales des deux caractérisations globales (i.e. ISpS et GUEC) introduites dans la Section 1.2. A cause de la similarité avec la version globale, notre présentation sera très concise. Pour des raisons du temps nous n'avons pas pu développer la contrepartie du théorème 1.9 et nous ne développons ici que celle du théorème 1.10.

### 1.3.1 LISS et le théorème du petit gain local

Considérons un système nonlinéaire :

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (1.138)$$

avec  $f$  une fonction régulière.

**Définition 1.10** *Le système (1.138) ayant  $u$  comme entrée est dit d'être localement entrée-à-état stable (LISS), s'il existe une constante  $u_{\max}^0 > 0$ , un voisinage ouvert  $U_x$  de 0, une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une fonction  $\gamma$  de classe  $K$ , telles qu'à chaque entrée mesurable  $u(\cdot)$  satisfaisant  $\|u\| \leq u_{\max}^0$ , et à chaque condition initiale  $x(0)$  dans  $U_x$ , est associée une solution  $x(t)$ , définie pour tout  $t \geq 0$ , satisfaisant :*

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \{|u(\tau)|\}\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.139)$$

La propriété LISS n'est pas une restriction forte pour un système commandé. En effet, nous avons :

**Théorème 1.13** *Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  ayant  $u$  pour entrée et  $x$  pour état est localement entrée-à-état stable si l'équilibre  $x = 0$  du système  $\dot{x} = f(x, 0)$  est localement asymptotiquement stable.*

C'est en fait un résultat de stabilité totale.

Avec cette notion LISS, nous pouvons étudier la stabilité du système interconnecté :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, z) \\ \dot{z} = h(x, z) \end{cases} \quad (1.140)$$

Nous avons le théorème du petit gain local suivant :

**Théorème 1.14** *Supposons que le sous système  $x$  de (1.140) est LISS avec un couple de fonctions  $(\beta_x, \gamma_x)$  satisfaisant (1.139), et le sous système  $z$  de (1.140) est LISS avec  $(\beta_z, \gamma_z)$  satisfaisant (1.139), et si les fonctions  $\gamma_x$  et  $\gamma_z$  satisfont la condition suivante :*

$$\gamma_x \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_z(s) \leq (\text{Id} - \rho_2)(s) \quad \forall s \in [0, s^*] \quad (1.141)$$

où  $\rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont deux fonctions de classe  $K$ , et  $s^*$  est une constante positive, alors l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.139) est asymptotiquement stable.

*Preuve :* voir Appendice B. □

Pour voir l'intérêt du théorème du petit gain local 1.14, étudions le système suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \omega(x, z) \quad (1.142)$$

$$\dot{z} = h(x, z) \quad (1.143)$$

où  $f$ ,  $\omega$  et  $h$  sont trois champs de vecteurs réguliers tels que :

$$f(0) = 0, \quad \omega(0, 0) = 0, \quad h(0, 0) = 0.$$

Nous avons le résultat suivant sur la stabilité asymptotique de (1.142)-(1.143).

**Corollaire 1.15** *Supposons que  $f$  est homogène de degré  $\lambda$  tel que  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x)$  est asymptotiquement stable, et que l'équilibre  $z = 0$  de  $\dot{z} = h(0, z)$  est asymptotiquement stable. S'il existe deux fonctions  $\alpha_1, \alpha_2$  de classe  $K$ , deux voisinages ouverts  $V_x$  de  $x = 0$  et  $V_z$  de  $z = 0$  tels que :*

$$|\omega(x, z)| \leq |x|^\lambda (\alpha_1(|x|) + \alpha_2(|z|)) \quad \forall (x, z) \in V_x \times V_z, \quad (1.144)$$

alors l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (1.142)-(1.143) est asymptotiquement stable.

**Remarque 1.8** Ce corollaire généralise le Lemme [26, pp. 442] démontré par Isidori via la théorie de variété centre pour le cas où  $f(x) = Ax$ .  $\square$

*Preuve :* Comme l'équilibre  $z = 0$  de  $\dot{z} = h(0, z)$  est asymptotiquement stable, selon le théorème 1.13, le système  $\dot{z} = h(x, z)$  est LISS avec  $x$  comme entrée et un certain  $\gamma_z$ . Il suffit donc de démontrer que le sous système (1.142) est LISS avec  $z$  comme entrée et un gain nul, i.e.  $\gamma_x \equiv 0$ .

En effet, puisque  $\dot{x} = f(x)$  est un système homogène asymptotiquement stable, d'après Hahn [20, Theorem 57.4], il existe une fonction de Lyapunov homogène de degré  $\mu$  et quatre constantes positives  $c_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) telles que :

$$c_1|x|^\mu \leq V(x) \leq c_2|x|^\mu, \quad \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right| \leq c_3|x|^{\mu-1}, \quad (1.145)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) \leq -c_4|x|^{\lambda+\mu-1}. \quad (1.146)$$

La dérivée temporelle de  $V$  le long des solutions de (1.142) est :

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) + \frac{\partial V}{\partial x}(x)\omega(x, z).$$

A l'aide de (1.145), (1.146) et (1.144), nous avons :

$$\dot{V} \leq -c_4|x|^{\lambda+\mu-1} + c_3|x|^{\lambda+\mu-1}(\alpha_1(|x|) + \alpha_2(|z|)) \quad \forall (x, z) \in V_x \times V_z. \quad (1.147)$$

Comme  $V_x$  et  $V_z$  sont ouverts, et vu le fait que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont de classe  $K$ , on peut choisir  $r_0$  un nombre réel strictement positif tel que :

$$\{(x, z) : |x| < r_0, |z| < r_0\} \subseteq V_x \times V_z, \\ c_3(\alpha_1(|x|) + \alpha_2(|z|)) \leq \frac{c_4}{2} \quad \forall (x, z) : |x| < r_0, |z| < r_0.$$

(1.147) entraîne :

$$\dot{V} \leq -\frac{c_4}{2}|x|^{\lambda+\mu-1} \quad \forall (x, z) : |x| < r_0, |z| < r_0. \quad (1.148)$$

Afin de démontrer la propriété LISS du sous système (1.142) avec  $z$  comme entrée, considérons une fonction quelconque  $z(t)$  continue,<sup>6</sup> bornée et définie sur  $[0, +\infty)$ . Soit  $x(t)$  la solution maximale de  $[0, T)$  dans  $\{x : |x| < r_0\}$ . Lorsque  $\|z\| < r_0$  et  $|x(0)| < r_0$ , d'après (1.148), nous avons :

$$\dot{V} \leq -\frac{c_4}{2}|x|^{\lambda+\mu-1} \quad \forall t \in [0, T). \quad (1.149)$$

---

<sup>6</sup>Comme  $z$  est ici une composante des solutions  $C^1$  du système (1.142)-(1.143), il sera suffisant de considérer seulement les entrées continues.



On en déduit que  $T = +\infty$  et, selon (1.145) et Sontag [70, Lemma 6.1], il existe une fonction  $\beta_x$  de classe  $KL$  telle que :

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(0)|, t) \quad \forall t \geq 0 .$$

Ceci implique immédiatement que le sous système (1.142) est LISS avec  $z$  comme entrée et un gain  $\gamma_x \equiv 0$ . Ce qui permet de conclure.  $\square$

**Notes bibliographiques.** La notion LISS est provenue de Sontag [71]. Le théorème 1.13 a été d'abord signalé par Sontag [71, Theorem 2] et puis raffiné par Teel et Praly [74, Fact 1.1, Remark 1.2]. Le théorème 1.14 a été démontré par Teel et Praly [74] dans le cas où  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont des nombres réels. Le corollaire 1.15 est une généralisation de Bacciotti [4, Lemma 15.4] et Isidori [26, Lemma, p.442]. Dans ce dernier une preuve fondée sur la théorie de variété centre a été donnée.

### 1.3.2 LUEC

Pour être concis, nous donnons simplement les versions locales des hypothèses principales i.e. OE (1.54) , GB (1.58) et GUEC (1.63) .

L'égalité (1.52) est remplacée par :

$$H(0, 0) = 0 \tag{1.150}$$

et OE (1.54) , GB (1.58) et GUEC (1.63) deviennent :

*il existe deux ensembles ouverts  $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega$ , deux ensembles compacts  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ , dont l'intérieur est non vide, et  $\Gamma \subset \Omega_1$ , tous contenant leurs origines respectives, et trois nombres réels positifs  $\mu_1, \mu_2, D$  tels que :*

**Hypothèse OEV (Observabilité de l'Evasion d'un Voisinage) (1.151)**

*Pour toute condition initiale  $X(0)$  dans  $\Omega_0$ , soit  $X(t)$  la solution correspondante de (1.51) et soit  $[0, T)$  son intervalle maximal de définition pour  $X(t) \in \Omega_1$ , alors :*

$$\exists t_0 \in [0, T) : X(t_0) \notin \Gamma \quad \Rightarrow \quad \exists t_1 \in [0, t_0) : H(X(t_1), t_1) \notin \mathcal{K} .$$

**Hypothèse LAS (Stabilité Asymptotique Locale) (1.152)**

*Il existe une fonction  $C^1$   $V$  qui est définie positive et propre, une fonction  $\alpha$  de classe  $K$  et un voisinage ouvert  $\mathcal{U}$  de  $0 \in \mathbb{R}^n$  tels que :*

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x) \stackrel{\text{def}}{=} -W(x) \leq -\alpha(V(x)) \quad \forall x \in \mathcal{U} . \tag{1.153}$$

Contrairement au cas global, nous supposons ici que  $V$  et  $W$  sont définies positives. Ceci nous permet de définir  $\Delta_{\mathcal{K}}$ , un nombre réel strictement positif tel que :

$$V(x) \leq \Delta_{\mathcal{K}} \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{K} . \tag{1.154}$$

**Hypothèse LUEC (Caractérisation Locale des Effets Non-modélisés) (1.155)**

*Chaque solution maximale de (1.51)  $X : [0, T) \rightarrow \Omega_1$  satisfait pour tout  $t \in [0, T)$  :*

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| \leq \mu_1 W(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon(x(s)) + D \tag{1.156}$$

où  $x(t) = H(X(t), t)$  et  $\Upsilon(x) = \alpha(V(x))$ .

Nous avons :

**Proposition 1.5 (Bornitude Locale) :** *Supposons que les hypothèses (1.150), OEV (1.151) et LAS (1.152) sont vérifiées avec :*

$$\mathcal{U} \supseteq H(\Omega_1, \mathbb{R}_+) \bigcup \mathcal{K} \quad (1.157)$$

et que, pour certains nombres réels positifs  $\mu_1, \mu_2, D$  satisfaisant :

$$\frac{1}{1 - \mu_1 - \mu_2} D \leq \alpha(\Delta_{\mathcal{K}}) \quad (1.158)$$

l'hypothèse LUEC (1.155) est satisfaite. Alors il existe un voisinage ouvert  $\Omega_2 \subseteq \Omega_0$  de l'origine tel que chaque solution de (1.51), avec  $X(0) \in \Omega_2$  est bien définie sur  $[0, +\infty)$ , unique et dans  $\Gamma$ . De plus, pour chaque telle solution, satisfaisant pour tous les  $t_0 \geq 0$ ,

$$\max \left\{ 0, \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t))] \right| - \mu_1 W(x(t)) - \mu_2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \{\Upsilon(x(s))\} \right\} \rightarrow 0 \quad (1.159)$$

quand  $t - t_0$  tend vers l'infini, nous avons  $x(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Preuve : voir Appendice B. □

### 1.3.3 Exemple

**Exemple 1.6 :** Considérons le système nonlinéaire singulièrement perturbé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - y \\ \dot{x}_2 &= u(x_1, x_2) \\ \mu \dot{y} &= -(3 - x_1^2)y + x_1^3 \end{cases} \quad (1.160)$$

où  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $X = (x, y) \in \mathbb{R}^3$  est l'état, et  $\mu$  est un nombre réel positif. Et  $u(x_1, x_2)$  est la fonction définie dans (1.110).

#### • avec la caractérisation LUEC

Pour ce système (1.160), la fonction  $H$  définie par  $H(X, t) = x$  satisfait l'hypothèse (1.150). Définissons deux ensembles ouverts  $\Omega_0, \Omega_1$  dans  $\mathbb{R}^3$ , deux ensembles compacts  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^2, \Gamma \subset \Omega_1$  par :

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \times \mathbb{R} \times (-a, a), \quad \Omega_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \times \mathbb{R}^2, \quad \Omega = \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{K} &= [-1, 1] \times [-b, b], \quad \Gamma = [-1, 1] \times [-b, b] \times [-a, a], \quad \mathcal{U} = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \times \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.161)$$

où  $a \geq \frac{1}{2}$  et  $b$  sont deux nombres réels positifs arbitraires. Notons que ces ensembles contiennent l'origine de leurs espaces respectifs. Pour ces ensembles, l'hypothèse OEV (1.151) est satisfaite puisque nous avons :

$$\mu \dot{y}^2 \leq -y^2 + x_1^6 \quad (1.162)$$

pour toutes les fonctions du temps  $(x_1(t), x_2(t), y(t)) \in \Omega_1$ .

Reste à vérifier l'hypothèse LUEC (1.155) pour (1.160). Prenons le système (1.112) pour modèle de synthèse pour le système (1.160) et suivons les notations de l'exemple 1.5. L'erreur de modélisation  $(x_1^3 - y)$  satisfait l'inégalité suivante :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t)) (x_1^3(t) - y(t)) \right| \leq \mu_1 W(x_1(t), x_2(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon(x(s)) + D(t) \quad (1.163)$$

pour  $(x_1(t), x_2(t), y(t)) \in \Omega_1$ . Dans l'équation (1.163),  $W(x_1, x_2)$  est définie par (1.113),  $\Upsilon$  est définie comme dans (1.118), et  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $D(t)$  sont donnés par :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3}{c_1}, \quad D(t) = \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{\mu}} y(0)^{\frac{4}{3}}. \quad (1.164)$$

Si bien que l'hypothèse LUEC (1.155) est vérifiée par (1.160).

En appliquant la Proposition 1.5 au système (autonome) singulièrement perturbé (1.160) avec  $u(x_1, x_2)$  définie dans (1.110)-(1.111), lorsque  $c_1$  est choisi plus grand que  $\frac{3}{2}$ , pour les conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), y(0))$  dans un voisinage de l'origine (voir (B.135)), quelle que soit la valeur positive de  $\mu$ , les solutions du système restent dans  $[-1, 1] \times [-b, b] \times [-a, a]$  et tendent vers 0.

#### • avec la caractérisation LISS

Avec nos calculs (1.122) à (1.126), nous avons montré que, pour chaque  $y(t)$  définie sur  $[0, \infty)$ , mesurable et essentiellement bornée, les solutions  $(x_1(t), x_2(t))$  du système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 - y \\ \dot{x}_2 &= u(x_1, x_2) \end{cases}$$

sont définies sur  $[0, +\infty)$  et satisfont que, pour  $0 \leq t_0 \leq t < +\infty$ ,

$$V(x_1(t), x_2(t)) \leq \beta_1(V(x_1(t_0), x_2(t_0)), t - t_0) + \gamma_1 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |y(\tau)| \right) \quad (1.165)$$

où  $\beta_1$ , de classe  $KL$ , et  $\gamma_1$ , de classe  $K$ , sont définies dans (1.125) :

$$\beta_1(s, t) := \frac{s}{1 + c_1 st/2}, \quad \gamma_1(s) := \left( \frac{3}{c_1} \right)^{1/2} s^{2/3}. \quad (1.166)$$

Pour le sous système  $y$  de (1.160) :

$$\mu \dot{y} = -(3 - x_1^2)y + x_1^3, \quad (1.167)$$

pour chaque fonction  $x_1(t)$  définie sur  $[0, +\infty)$  et bornée avec la norme  $\|x_1\| \leq \sqrt{2}$ , toute solution maximale  $y(t) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  de (1.166) satisfait (voir (1.162)) :

$$\mu \dot{y}^2 \leq -y^2 + x_1^6. \quad (1.168)$$

A l'aide de l'inégalité de Gronwall, quelque soit une paire de temps  $0 \leq t_0 \leq t < T$ , nous avons :

$$y(t)^2 \leq e^{-\frac{t-t_0}{\mu}} y(t_0)^2 + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} x_1(\tau)^6 \quad (1.169)$$

ou encore,

$$|y(t)| \leq e^{-\frac{t-t_0}{2\mu}} |y(t_0)| + \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} |x_1(\tau)|^3. \quad (1.170)$$

Comme  $x_1^2 \leq 2V(x_1, x_2)$  pour tout  $(x_1, x_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ , (1.170) implique directement que, pour n'importe quel signal  $x_2(t)$  défini sur  $[0, +\infty)$ ,

$$|y(t)| \leq \beta_2(|y(t_0)|, t - t_0) + \gamma_2 \left( \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{V(x_1(\tau), x_2(\tau))\} \right) \quad (1.171)$$

où  $\beta_2$ , de classe  $KL$ , et  $\gamma_2$ , de classe  $K$ , sont données par :

$$\beta_2(s, t) = s e^{-\frac{t}{2\mu}}, \quad \gamma_2(s) = 2^{3/2} s^{3/2}. \quad (1.172)$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\gamma_2 \circ 2\gamma_1(s) = \frac{8 \times 3^{3/4}}{c_1^{3/4}} s \quad (1.173)$$

En conséquence, la condition du petit gain (1.141) entre  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est satisfaite avec n'importe quel  $s^* > 0$  lorsque  $c_1$  est choisi suffisamment grand, par exemple tel que,

$$\frac{8 \times 3^{3/4}}{c_1^{3/4}} < 1.$$

Finalement, en appliquant le théorème 1.14 à (1.165)-(1.171), vu le fait que  $V$  dans (1.113) est définie positive et propre, on conclut que l'équilibre  $(x_1, x_2, y) = (0, 0, 0)$  de (1.160) est asymptotiquement stable. ■

## 1.4 Discussions de nos hypothèses de caractérisation

Le but de cette section est de comparer les deux caractérisations plus récentes (ISS et GUEC ou LUEC) avec les trois caractérisations plus classiques présentées dans la Section 1.1. Nous nous sommes limités au cas stationnaire.

### 1.4.1 Comparaison avec la stabilité totale

Considérons un système dynamique perturbé :

$$\dot{x} = f(x) + \omega(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (1.174)$$

où  $f$  est régulière telle que  $f(0) = 0$ .

Le théorème 1.2 montre que si le système  $\dot{x} = f(x)$  est asymptotiquement stable, alors l'équilibre  $x = 0$  de ce système est totalement stable. Sous la même hypothèse, nous avons énoncé dans la Section 1.3.1 un résultat intéressant (voir le théorème 1.13) : *si  $\dot{x} = f(x, 0)$  est asymptotiquement stable, alors  $\dot{x} = f(x, u)$  est LISS avec  $u$  considérée comme entrée.* Une façon de le voir comme un résultat de stabilité totale est de poser  $\omega = f(x, u) - f(x, 0)$  dans (1.174).

Dans la suite, nous nous proposons de montrer que sous la même hypothèse que  $\dot{x} = f(x, 0)$  est asymptotiquement stable en  $x = 0$ ,  $\dot{x} = f(x, u)$  avec  $u$  considérée comme entrée satisfait l'hypothèse LUEC (1.155).

En effet, d'après le théorème inverse de Lyapunov [20, Theorem 49.4], il existe une fonction  $C^1$  de Lyapunov  $V(x)$  pour  $\dot{x} = f(x, 0)$ , c'est-à-dire que, on peut trouver trois fonctions  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  de classe  $K$  telles que, pour  $x \in B_x(r) = \{x \mid |x| < r\}$  avec  $r > 0$ ,

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad (1.175)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x) f(x, 0) \leq -\alpha_3(|x|) . \quad (1.176)$$

Comme  $B_x(r)$  est un ensemble borné, il existe un nombre réel positif  $k_0$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \right| \leq k_0 \quad \forall x \in B_x(r) . \quad (1.177)$$

Soit  $u(t)$  une fonction définie sur  $[0, +\infty)$ , mesurable et essentiellement bornée par  $\|u\| \leq \mu_0$ . Considérons une solution maximale  $x(t) : [0, T) \rightarrow B_x(r)$  du système :

$$\dot{x} = f(x, u(t)) .$$

Puisque  $f(x, u)$  est régulière, il existe une fonction continue  $\bar{f}$  telle que :

$$f(x, u) - f(x, 0) = u^\top \bar{f}(x, u) . \quad (1.178)$$

Alors, il existe un nombre réel positif  $k_1$  tel que :

$$|\bar{f}(x, u)| \leq k_1 , \quad \forall (x, u) \in B_x(r) \times B_u(r) . \quad (1.179)$$

Vu (1.178), (1.179), si  $\mu_0 < r$ , nous avons :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [f(x(t), u(t)) - f(x(t), 0)] \right| \leq k_0 k_1 \mu_0 . \quad (1.180)$$

Ceci démontre l'hypothèse LUEC (1.155) . Finalement, nous avons démontré :

**Proposition 1.6** *Si  $\dot{x} = f(x, 0)$  est asymptotiquement stable, alors LUEC (1.155) est vérifiée par le système  $\dot{x} = f(x, u)$ . Plus précisément, il existe quatre nombres réels positifs  $r, k_0, k_1$  et  $\mu_0$  tels que  $\mu_0 < r$ , et pour chaque fonction  $u(t)$  définie pour tous les  $t \geq 0$ , mesurable et essentiellement bornée avec la norme  $\|u\| \leq \mu_0$ , toute solution maximale  $x(t) : [0, T) \rightarrow B_x(r)$  du système  $\dot{x} = f(x, u(t))$  satisfait :*

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x(t)) [\dot{x}(t) - f(x(t), 0)] \right| \leq \mu_0 k_0 k_1 . \quad (1.181)$$

#### 1.4.2 Comparaison avec les perturbations régulières

Nous établissons d'abord un résultat trivial : chaque système commandé qui est ISS avec un gain localement linéairement borné est  $K$ -quasiment stable pour un certain  $K > 0$ . Plus précisément, pour le système commandé

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.182)$$

nous avons :

**Proposition 1.7** Si (1.182) est LISS, c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels  $x_{\max}^0 > 0$ ,  $u_{\max}^0 > 0$ , et une fonction  $\beta$  de classe KL et une fonction  $\gamma$  de classe K tels que pour  $|x(0)| \leq x_{\max}^0$  et  $\|u\| \leq u_{\max}^0$ ,

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma\left(\sup_{0 \leq \tau \leq t} \{|u(\tau)|\}\right), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.183)$$

De plus, si  $\gamma$  est localement linéairement borné, i.e. :  $\exists c_1 > 0, s_1 > 0$  tels que

$$\gamma(s) \leq c_1 s, \quad \forall s \in [0, s_1], \quad (1.184)$$

alors l'origine  $x = 0$  est  $K$ -quasiment stable pour (1.182) pour un certain  $K > 0$ .

En particulier, si (1.182) est ISS avec une fonction  $\gamma$  globalement linéairement bornée, alors l'origine  $x = 0$  est globalement  $K$ -quasiment stable pour (1.182).

*Preuve :* Nos hypothèses entraînent immédiatement l'inégalité suivante :

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, 0) + c_1 \|u\| \quad (1.185)$$

pour  $|x(0)| \leq x_{\max}^0$  et  $\|u\| \leq \min\{s_1, u_{\max}^0\}$ . Dénotons  $\beta_0(s) := \beta(s, 0)$  et faisons la convention suivante :

$$\beta_0^{-1}\left(\limsup_{s \rightarrow +\infty} \beta_0(s)\right) = +\infty.$$

Donc en dénotant :

$$R := \min\{x_{\max}^0, s_1, u_{\max}^0\} > 0,$$

quel que soit  $0 < \eta < R$ , il existe un nombre réel positif  $\delta_1(\eta)$  défini par :

$$\delta_1(\eta) := \min\left\{\eta, \beta_0^{-1}\left(\min\{\eta, \limsup_{s \rightarrow +\infty} \beta_0(s)\}\right)\right\} \leq \eta$$

tel que chaque fois que  $|u(0)|_{\max} < \delta_1$ ,  $|x(0)|_{\max} < \delta_1$  et  $|u(t)|_{\max} \leq \eta$  pour  $t \in [0, t_1]$ , alors la solution associée  $x(t)$  vérifie  $|x(t)|_{\max} \leq (1 + c_1)\eta$  pour  $t \in [0, t_1]$ . Ceci dit, dû à la stationnarité, l'origine  $x = 0$  est  $(1 + c_1)$ -quasiment stable pour le système (1.182) dans la région  $B_x(R) \times B_u(R)$ .

Dans le cas où (1.183) et (1.184) sont globalement satisfaites, on obtient que  $R = +\infty$  et  $\limsup_{\eta \rightarrow +\infty} \delta_1(\eta) = +\infty$ . Donc, le résultat global découle immédiatement.  $\square$

Avec cette proposition, on s'aperçoit que le théorème 1.8 peut aussi être utile pour l'étude de la stabilité (resp. globale) du système (1.87) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \omega(x, z) \\ \dot{z} &= h(z, x), \end{cases}$$

dans le cas où les sous systèmes  $x$  et  $z$  sont LISS (resp. ISS) stables avec deux gains  $\gamma_x$  et  $\gamma_z$  localement (resp. globalement) linéairement bornés.

Le fait que les gains  $\gamma_x$  et  $\gamma_z$  sont localement linéairement bornés est parfois nécessaire.

**Exemple 1.1 (suite) :** Reprenons le système (1.16) dont l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  a été démontré d'être instable pour n'importe quel  $\varepsilon > 0$  :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x^5 + \varpi(\varepsilon) z^2 \\ \varepsilon \dot{z} &= -z + \varepsilon x^2. \end{cases} \quad (1.186)$$

En effet, nous pouvons montrer que le sous système  $x$  n'est pas  $K$ -quasiment stable pour n'importe quel  $K > 0$ . Sinon, il existe un nombre réel positif  $K > 0$  tel que l'origine  $x = 0$  est  $K$ -quasiment stable pour le système

$$\dot{x} = -x^5 + \varpi(\varepsilon) z^2, \quad (1.187)$$

c'est-à-dire, quel que soit  $\eta > 0$ , il existe un  $\delta \leq \eta$  tel que si  $|x(t_0)| < \delta$ ,  $|z(t_0)| < \delta$  et  $|z(t)| \leq \eta$  pour  $t$  dans  $[t_0, t_1]$ , alors  $|x(t)| < K\eta$ . Choisissons un  $\eta > 0$  tel que :

$$K^5 \eta^3 \leq \varpi(\varepsilon)/2$$

et une fonction continue non décroissante  $z(t)$ , définie sur  $[0, +\infty)$  telle que  $0 < z(0) < \delta(\eta)$  et  $z(t) = \eta$  pour tout  $t$  dans  $[1, +\infty)$ . A chaque condition initiale  $x(0)$  telle que  $0 < x(0) < \delta(\eta)$ , la solution associée  $x(t)$  satisfait que  $0 < x(t) < K\eta$  pour tout  $t \geq 0$ . Donc, pour tout  $t$  dans  $[1, +\infty)$ , nous avons :

$$\dot{x}(t) \geq -K^5 \eta^5 + \varpi(\varepsilon) \eta^2 \geq \varpi(\varepsilon) \eta^2 / 2$$

Ceci n'est pas possible.

Remarquons aussi que, bien que les sous systèmes  $z$  et  $x$  sont ISS, la condition du petit gain (1.47) n'est pas satisfaite avec  $d = 0$  autour de zéro, le théorème 1.10 nous permet donc de conclure la bornitude des solutions pas la convergence. Plus précisément, la formule de la variation des constantes donne :

$$|z(t)| \leq e^{-t/\varepsilon} |z(0)| + \gamma_z \left( \sup_{[0,t]} |x(\tau)| \right) \quad \forall t \geq 0$$

où  $\gamma_z(s) := \varepsilon s^2$  qui est localement linéairement borné. D'après l'algorithme de Sontag [70, Proof of Theorem 1], nous avons :

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(0)|, t) + \gamma_x \left( \sup_{[0,t]} |z(\tau)| \right) \quad \forall t \geq 0$$

où  $\beta_x$ , de classe  $KL$ , et  $\gamma_x$ , de classe  $K$ , sont données par :

$$\beta_x(s, t) = \left( \frac{3 \times 6^{2/3} s^4}{3 \times 6^{2/3} s^4 t} \right)^{1/4}, \quad \gamma_x(s) = (2\varpi(\varepsilon))^{1/5} s^{2/5}, \quad \forall s \geq 0, t \geq 0.$$

Finalement,

$$\gamma_z \circ \gamma_x = \varepsilon (2\varpi(\varepsilon))^{2/5} s^{4/5},$$

c'est-à-dire, la propriété (1.47) ne peut pas être vérifiée avec  $d = 0$ .

Grâce à cet exemple, nous avons :

**Remarque 1.9** Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  n'est pas forcément  $K$ -quasiment stable lorsque l'équilibre  $x = 0$  de son système avec une entrée nulle est localement asymptotiquement stable. Mais sous la même hypothèse, le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est LISS par rapport à  $u$ .  $\square$

### 1.4.3 Comparaison avec les perturbations singulières

Nous nous proposons de montrer qu'en renforçant leurs conditions, les résultats du théorème 1.6 et du corollaire 1.7 sur les perturbations singulières peuvent aussi être obtenus par le théorème du petit gain 1.10 ou 1.14.

Nous supposons que la fonction  $W$  et les fonctions de comparaison  $\phi$  et  $\psi$  du théorème 1.6 ou du corollaire 1.7 satisfont :

(S) Il existe une fonction définie positive  $W_0$  de classe  $C^1$ , deux fonctions  $\phi_0, \psi_0$  de classe  $K_\infty$  telles que :

$$W(x, z) = W_0(z - h(x)) \quad (1.188)$$

$$\phi(z) = \phi_0(W_0(z)) \quad (1.189)$$

$$\psi(x) = \psi_0(V(x)) . \quad (1.190)$$

La propriété que  $\phi_0$  et  $\psi_0$  sont de classe  $K_\infty$  est utile seulement pour le cas global.

Sous la condition (S), on montre maintenant que les hypothèses 1-3 du théorème 1.6 ou 1.7 impliquent les hypothèses du théorème 1.10 ou 1.14.

Examinons en premier lieu l'hypothèse 3. Considérons le sous système  $x$  de (1.20) qui s'écrit comme :

$$\dot{x} = f(x, h(x)) + [f(x, z) - f(x, h(x))] . \quad (1.191)$$

Dénotons  $\bar{z} := z - h(x)$ . Vu (1.24), (1.25) et (S), nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{V} \Big|_{(1.191)} &\leq -c_1 \psi^2(x) + d_1 \psi(x) \phi(z - h(x)) \\ &\leq -(1 - \delta_1) c_1 \psi_0(V(x))^2 - \delta_1 c_1 \psi_0(V(x))^2 + d_1 \psi_0(V(x)) \phi_0(W_0(\bar{z})) \end{aligned} \quad (1.192)$$

où  $\delta_1 \in (0, 1)$  est arbitraire. En appliquant l'algorithme de Sontag relatif à la stabilité ISS à l'équation (1.192) (voir Appendice A), nous obtenons une fonction  $\beta_1$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma_1$  de classe  $K$  telles que

$$\psi_0(V(x(t))) \leq \beta_1(\psi_0(V(x(0))), t) + \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [0, t]} \{\phi_0(W_0(\bar{z}(\tau)))\} \right) \quad (1.193)$$

où l'expression explicite de  $\gamma_1$  est donnée par :

$$\gamma_1(s) := \frac{d_1}{\delta_1 c_1} s \quad \forall s \geq 0 . \quad (1.194)$$

Puisque  $\psi_0$  est de classe  $K_\infty$  et  $V$  est positive définie et propre, il existe une fonction  $\bar{\beta}_1$  de classe  $KL$  telle que :

$$\beta_1(\psi_0(V(x(0))), t) \leq \bar{\beta}_1(|x(0)|, t) \quad \forall x(0) \in \mathbb{R}^n .$$

Ensuite, nous examinons l'hypothèse 2. En transformant le sous système  $z$  de (1.20) en système  $\bar{z}$  :

$$\dot{\bar{z}} = \frac{1}{\varepsilon} g(x, h(x) + \bar{z}) - \frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x, h(x) + \bar{z}) , \quad (1.195)$$



avec (1.188), la dérivée de  $W_0(\bar{z})$  le long des solutions de (1.195) est :

$$\dot{W}_0 \Big|_{(1.195)} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W_0}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) g(x, h(x) + \bar{z}) - \frac{\partial W_0}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) \frac{\partial h}{\partial x}(x) f(x, h(x) + \bar{z}) , \quad (1.196)$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial z}(x, z) g(x, z) + \frac{\partial W}{\partial x}(x, z) f(x, z) . \quad (1.197)$$

Vu (1.21), (1.22) et (S), nous obtenons :

$$\dot{W}_0 \Big|_{(1.195)} \leq - \left( \frac{c_2}{\varepsilon} - k \right) \phi_0(W_0(\bar{z}))^2 + d_2 \phi_0(W_0(\bar{z})) \psi_0(V(x)) . \quad (1.198)$$

En utilisant encore l'algorithme de Sontag à (1.198), il existe une fonction  $\beta_2$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma_2$  de classe  $K$  telles que

$$\phi_0(W_0(\bar{z}(t))) \leq \beta_2(\phi_0(W_0(\bar{z}(0))), t) + \gamma_2 \left( \sup_{\tau \in [0, t]} \{ \psi_0(V(x(\tau))) \} \right) \quad (1.199)$$

où l'expression explicite de  $\gamma_2$  est la suivante :

$$\gamma_2(s) := \frac{\varepsilon d_2}{\delta_2 c_2} s \quad \forall s \geq 0 \quad (1.200)$$

avec  $\delta_2 \in (0, 1)$  satisfaisant que  $\varepsilon < (1 - \delta_2) \alpha_2 / \gamma$ . A partir de (1.193) et (1.199), avec les fonctions  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  définies respectivement par (1.194) et (1.200), la condition du petit gain (1.41) est vérifiée avec  $d_3 = 0$  pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, plus précisément,

$$0 < \varepsilon < \epsilon(\delta_1, \delta_2) := \min \left\{ \frac{(1 - \delta_2) c_2}{k}, \frac{\delta_1 \delta_2 c_1 c_2}{d_1 d_2} \right\} . \quad (1.201)$$

Remarquons que la plus grande valeur de  $\epsilon(\delta_1, \delta_2)$  est :

$$\varepsilon^* := \sup_{\delta_i \in (0, 1)} \{ \epsilon(\delta_1, \delta_2) \} = \frac{c_1 c_2}{c_1 k + d_1 d_2} \quad (1.202)$$

qui est identique à la valeur de  $\varepsilon^*$  obtenue dans (1.26) par le théorème 1.6.

En conclusion, en regardant  $\phi_0(W_0(\bar{z}))$  (resp.  $\psi_0(V(x))$ ) comme entrée et  $\psi_0(V(x))$  (resp.  $\phi_0(W_0(\bar{z}))$ ) comme sortie du sous système  $x$  (resp.  $z$ ) de (1.20), le théorème du petit gain généralisé 1.9 ou 1.14 à (1.193)-(1.199) donne les mêmes résultats que ceux du théorème 1.6 et du corollaire 1.7 lorsque les hypothèses sont renforcées en l'hypothèse (S).

**Exemple 1.7** : Etudions le système singulièrement perturbé suivant :

$$\dot{x} = x - x^3 + z = f(x, z) \quad (1.203)$$

$$\varepsilon \dot{z} = -x - z = g(x, z) \quad (1.204)$$

qui est considéré dans [40, Example 2.1, pp.299]. Pour ce système qui n'a un seul équilibre à l'origine, les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème 1.6 sont vérifiées pour :

$$\begin{aligned} h(x) &:= -x, \quad V(x) := \frac{1}{4} x^4, \quad c_1 = 1, \quad \psi(x) := |x|^3, \\ W(x, z) &:= \frac{1}{2} (x + z)^2, \quad c_2 = 1, \quad \phi(x + z) := |x + z|, \quad d_1 = d_2 = k = 1. \end{aligned} \quad (1.205)$$

De plus, ces hypothèses sont globalement satisfaites, donc d'après le corollaire 1.7, le système (1.203)-(1.204) est globalement asymptotiquement stable pour tous les  $\varepsilon$  dans  $(0, 0.5)$ .

Avant de présenter étape-par-étape notre procédure pour appliquer le théorème du petit gain, remarquons que la condition (S) est vérifiée par :

$$W_0(z) := \frac{1}{2} z^2, \quad \phi_0(s) := s, \quad \psi_0(s) := 4^{3/4} s^{3/4}, \quad \forall z \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+.$$

*Etape 1 :* Puisque  $h(x) = -x$  et donc  $\bar{z} = x + z$ , le système (1.203) s'écrit comme :

$$\dot{x} = -x^3 + \bar{z}. \quad (1.206)$$

(1.206) implique :

$$\dot{V} \leq -8(1 - \delta_1)V^{\frac{3}{2}} - \delta_1 x^6 + |x^3| |\bar{z}| \quad (1.207)$$

où  $\delta_1 \in (0, 1)$ . En utilisant l'algorithme de Sontag relatif à la stabilité à (1.207), nous obtenons :

$$|x(t)^3| \leq \beta_1(|x(0)^3|, t) + \frac{1}{\delta_1} \sup_{\tau \in [0, t]} \{|\bar{z}(\tau)|\} \quad (1.208)$$

où  $\beta_1$  est une fonction de classe  $KL$  donnée par :

$$\beta_1(s, t) = \frac{s}{(1 + 2(1 - \delta_1)ts^{2/3})^{3/2}} \quad \forall s \geq 0, t \geq 0.$$

*Etape 2 :* A partir du système (1.204), nous avons :

$$\dot{W} = -\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)\bar{z}^2 - x^3\bar{z}. \quad (1.209)$$

De la même manière que dans l'étape 1, nous obtenons :

$$|\bar{z}(t)| \leq \beta_2(|\bar{z}(0)|, t) + \sup_{\tau \in [0, t]} \left\{ \frac{\varepsilon}{\delta_2} |x(\tau)^3| \right\} \quad (1.210)$$

où  $\delta_2 \in (0, 1)$  est tel que  $\varepsilon < (1 - \delta_2)$ . Avec (1.208) et (1.210), la condition du petit gain donne :

$$\varepsilon < \min\{\delta_1\delta_2, (1 - \delta_2)\} := \epsilon(\delta_1, \delta_2).$$

Il en résulte que :

$$\varepsilon^* = \sup_{\delta_i \in (0, 1)} \{\epsilon(\delta_1, \delta_2)\} = 0.5.$$

Finalement, d'après le théorème 1.10, nous pouvons en conclure que pour tous les  $0 < \varepsilon < \varepsilon^* = 0.5$ , le système (1.203)-(1.204) est globalement asymptotiquement stable. ■

## 1.5 Résumé

Nous avons donné diverses réponses au problème de robustesse de la bornitude et/ou de la stabilité asymptotique des solutions des systèmes dynamiques sans commande. Deux caractérisations plus récentes des effets non modélisés ont été proposées. La première caractérisation appelée SpES généralise la notion ISS due à Sontag [70, 71]. Grâce à cette notion, nous avons complété un théorème du petit gain nonlinéaire établi récemment par Mareels et Hill [47] avec

---

un résultat de stabilité de Lyapunov, c'est-à-dire que l'équilibre d'un système composé de deux systèmes SES est GAS si la composition de deux gains nonlinéaires est strictement inférieure à la fonction identité. La seconde caractérisation des effets non modélisés appelée GUEC est de type Lyapunov. Il s'agit d'étudier la stabilité d'un système à partir d'un modèle de synthèse et d'utiliser une borne significative dépendant d'une fonction de Lyapunov du modèle. Au moyen d'exemples, nous montrons que cette caractérisation a le potentiel de contenir beaucoup d'incertitudes usuelles mais plus structurées. Nous avons, aussi à l'aide des exemples, comparé ces caractérisations récentes avec des caractérisations plus classiques : la théorie de la stabilité totale, la théorie des perturbations singulières et la théorie des perturbations régulières. L'aspect local a aussi été considéré.



## Chapitre 2

# Application du Théorème du Petit Gain Généralisé

### 2.0 Introduction

Nous considérons désormais les systèmes dynamiques commandés. L'objectif des Chapitres 2 et 3 est l'étude de la synthèse d'un contrôleur robuste. Plus précisément, nous nous fixons comme objectif le fait de satisfaire les hypothèses des théorèmes principaux du Chapitre 1. Ce chapitre concerne l'application du théorème du petit gain généralisé 1.9 ou 1.10 du chapitre 1 au problème de stabilisation globale des systèmes nonlinéaires. Le chapitre suivant discutera comment satisfaire la caractérisation GUEC (1.63) pour résoudre le problème de stabilisation robuste des systèmes nonlinéaires soumis à des incertitudes dynamiques et paramétriques.

Le problème de stabilisation globale des systèmes nonlinéaires a attiré l'attention de beaucoup de chercheurs durant la dernière décennie. La difficulté du problème vient d'abord du fait que les systèmes nonlinéaires ne possèdent pas une structure universelle, à la grande différence des systèmes linéaires. De plus en raison des limites des connaissances actuelles en non-linéaire, la construction de contrôleurs qui stabilisent *globalement* un système nonlinéaire est très difficile, sans parler du fait que la preuve de l'existence d'un tel contrôleur est loin d'être un problème simple. C'est pourquoi l'étude de classes particulières de systèmes nonlinéaires mais toutefois assez générales est une étape préliminaire et nécessaire à la mise en place d'une théorie systématique des systèmes nonlinéaires.

Notre point de départ est la classe des systèmes triangulaires suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système (2.1). Un système sous la forme (2.1) est appelé *système rétroactif récurrent*. En effet, il est constitué d'une chaîne d'intégrateurs dont les états agissent de façon rétroactive sur les intégrateurs les précédant dans la chaîne. Des conditions nécessaires et suffisantes sous lesquelles il existe un système de coordonnées permettant d'écrire un système nonlinéaire général  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  sous la forme (2.1) sont données dans Nam et Arapostathis [54]. Remarquons que ce type de

systèmes a été largement étudié dans la littérature, et les outils pour construire la commande stabilisante, appelés souvent *ajout d'un intégrateur*, se trouvent dans [41], [76], [7], [68], [71] et les références qui se trouvent dans les précédentes.

Comme nous l'avons signalé, nous nous intéressons particulièrement au problème de robustesse : nous étudions le problème de stabilisation globale de systèmes nonlinéaires proches du système (2.1). Il est important de noter que, bien que (2.1) soit *globalement* linéarisable par bouclage et difféomorphisme (voir [26]), les systèmes de la classe que l'on va définir sont loin d'être tous globalement linéarisables.

L'importance du théorème du petit gain 1.10 est qu'il nous permet d'établir un théorème sur la propagation d'ISpS par l'ajout d'un intégrateur. Nous rassemblons dans la Section 2.1 tous les outils nécessaires pour résoudre nos problèmes. Puis dans la Section 2.2, on montre comment utiliser ces outils, en conjonction avec le théorème du petit-gain 1.10 ou 1.9, pour synthétiser un contrôleur par retour d'état partiel qui stabilise d'une manière globale une classe de systèmes autour de (2.1). Le problème de stabilisation globale par retour de sortie est traité dans la Section 2.3. Finalement, nous donnons une autre application du théorème du petit gain à une classe de systèmes adaptatifs.

## 2.1 Les outils

Le but de cette section est de donner deux outils fondamentaux, l'un à propos de l'assignation de gain à un intégrateur, l'autre concernant l'assignation de gain à  $n$  intégrateurs. Nous allons voir que la plupart des résultats principaux du Chapitre 2 sont une application plus ou moins directe de ces résultats et du théorème du petit gain généralisé 1.9.

Nous avons :

**Proposition 2.1 (Assignation de gain à un intégrateur)** *Considérons le système :*

$$\dot{x} = \omega + \omega_0 u, \quad u \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

où  $u$  est l'entrée,  $x$  est l'état, et  $\omega$  et  $\omega_0$  sont des perturbations. Supposons l'existence d'un nombre réel strictement positif  $\delta$  connu tel que :

$$\omega_0 \geq \delta. \quad (2.3)$$

Pour toute fonction  $\gamma$  de classe  $K_\infty$ , il existe une loi de commande régulière  $\vartheta(x)$ , avec  $\vartheta(0) = 0$ , qui rend le système bouclé (2.2) ISpS avec  $\omega$  comme entrée et  $\gamma$  comme gain, ceci uniformément en  $\omega_0$  vérifiant (2.3).

De plus, si l'inverse  $\gamma^{-1}$  de  $\gamma$  est localement linéairement bornée, i.e. : il existe deux nombres réels positifs  $c$  et  $\chi$  tels que :

$$\gamma^{-1}(s) \leq c s \quad \forall s \in [0, \chi], \quad (2.4)$$

alors le système bouclé (2.2) devient ISS.

*Preuve :* voir Appendice C. □

**Remarque 2.1** La condition que  $\gamma$  est de classe  $K_\infty$  est cruciale dans la Proposition 2.1. Dans le fait, cette proposition devient fausse si l'on demande seulement  $\gamma$  de classe  $K$ . Par exemple, considérons le cas où  $\omega_0 = 1$  dans (2.2) et un gain  $\gamma$  défini par :

$$\gamma(s) := \frac{s}{1+s}. \quad (2.5)$$

Clairement, cette fonction  $\gamma$  est de classe  $K$  et vérifie :

$$0 \leq \gamma(s) < 1 \quad \forall s \geq 0. \quad (2.6)$$

Supposons qu'il existe une fonction régulière  $\vartheta(x)$ , qui est zéro en zéro telle que le système :

$$\dot{x} = -\vartheta(x) + \omega \quad (2.7)$$

est ISpS avec  $\omega$  comme entrée et  $\gamma$  dans (2.5) comme gain. C'est-à-dire, il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une constante positive  $d$  telles que les solutions  $x(t)$  de (2.7) définies pour  $t \geq 0$  vérifient :

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|\omega_t\|) + d \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

En particulier, en prenant  $x(0) = 0$ , (2.8) et (2.6) donnent :

$$|x(t)| \leq 1 + d \quad \forall t \geq 0, \quad (2.9)$$

ceci dit, toutes les solutions  $x(t)$  de (2.7), avec  $x(0) = 0$ , sont bornées par  $1 + d$ , une constante indépendante de  $\omega$ . C'est impossible, puisque pour (2.7) on peut toujours choisir un nombre réel  $\omega$  tel que soit la solution avec la condition initiale nulle explose avec le temps, soit l'équilibre de (2.7) est autant éloigné de l'origine que possible.  $\square$

Avec la Proposition 2.1, nous savons que nous pouvons assigner un gain quelconque à un intégrateur perturbé. Ce résultat se généralise au cas de  $n$  intégrateurs de la façon suivante :

**Proposition 2.2 (Assignation de gain à  $n$  intégrateurs)** *Considérons le système :*

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = u + \omega_n \end{cases} \quad (2.10)$$

avec  $u$  comme entrée,  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  comme état,  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme perturbation,  $\xi_1$  comme sortie. Pour toute fonction  $\gamma$  de classe  $K_\infty$ , il existe une loi de commande  $L_u(\xi_1, \dots, \xi_n)$ , avec  $L_u(0) = 0$ , qui rende :

1. le système bouclé (2.10) ISS avec  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme entrée.
2. le système bouclé (2.10) SpES avec  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme entrée et  $\gamma$  comme gain.

De plus, si l'inverse  $\gamma^{-1}$  de  $\gamma$  est localement linéairement bornée, i.e. :  $\exists \chi > 0$ , et  $C > 0$  tels que

$$\gamma^{-1}(s) \leq Cs \quad \forall s \in [0, \chi], \quad (2.11)$$

alors le système bouclé (2.10) est rendu SES.

*Preuve :* voir Appendice C.  $\square$

**Remarque 2.2** Il est important de noter que pour ce résultat la sortie doit être le dernier étage de la chaîne d'intégration.  $\square$

**Remarque 2.3** Grâce au premier point de la Proposition 2.2, le système bouclé (2.10) avec  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme entrée et  $\xi_1$  comme sortie vérifie la propriété OFNB.  $\square$

## 2.2 Stabilisation globale par retour d'état partiel

L'objectif de la section est d'étudier la stabilisation globale de certaines classes de systèmes non-linéaires. On montre comment l'utilisation des outils établis dans la Section 2.1 pour construire un contrôleur permet de satisfaire les hypothèses du théorème du petit gain et de ce fait de stabiliser par retour d'état partiel.

### 2.2.1 Ajout d'une dynamique ISS

Nous considérons ici le cas où les perturbations  $\omega$  et  $\omega_0$  ou  $\omega_1, \dots, \omega_n$  des Propositions 2.1 et 2.2 sont augmentées par un système ISS ou ISpS.

Pour motiver nos résultats, considérons le système nonlinéaire composé d'un système ISS et d'un intégrateur :

$$\begin{cases} \dot{z} &= h(z, x) \\ \dot{x} &= f(z, x) + g(z, x)u \end{cases} \quad (2.12)$$

où  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée,  $z \in \mathbb{R}^p$  et  $x \in \mathbb{R}$  constituent l'état, et  $h$  est une fonction régulière telle que  $\dot{z} = h(z, x)$  est ISS avec  $x$  comme entrée, et  $g$  satisfait pour une constante positive *connue*  $\delta$  l'inégalité suivante :

$$g(z, x) \geq \delta \quad \forall (z, x) \in \mathbb{R}^{p+1}. \quad (2.13)$$

Suivant les arguments de [71] (aussi de [45]), nous obtenons un feedback d'état

$$u := \frac{-x - f(z, x)}{g(z, x)}$$

qui rend le système (2.12) GAS. En fait on vérifie facilement qu'avec la commande

$$u := \frac{-x - f(z, x) + v}{g(z, x)},$$

le sous système  $x$  de (2.12) devient ISS avec  $v$  comme entrée, donc le système entier est ISS avec  $v$  comme entrée (voir aussi Proposition 2.4). Notons que cette loi de commande dépend de  $z$ . Et malheureusement on ne sait pas aujourd'hui s'il est possible de rendre (2.12) GAS ou ISS avec une commande ne dépendant que de  $x$ , i.e. :  $u = \vartheta(x)$  ou  $u = \vartheta(x) + v$ . Par contre, ce problème est soluble si GAS est remplacée par la bornitude de solutions, ou ISS est remplacée par ISpS.

En effet, une application directe de la Proposition 2.1 et du théorème du petit gain généralisé 1.9 donne :

**Proposition 2.3** *Si dans (2.12) le sous système  $z$  est ISpS avec  $x$  comme entrée, alors on peut trouver un contrôleur régulier par retour d'état partiel  $\vartheta(x)$ , avec  $\vartheta(0) = 0$ , tel que toutes les solutions du système (2.12) en boucle fermée avec  $u = \vartheta(x)$  sont bornées.*

*De plus, si  $f(0, 0) = 0$  et le sous système  $z$  est ISS avec un gain  $\gamma_z$ , et s'il existe deux fonctions  $\gamma_1, \gamma_2$  de classe  $K$  telles que :*

$$|f(z, x)| \leq \gamma_1(|x|) + \gamma_2(|z|) \quad \forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^p \quad (2.14)$$

*et que la fonction  $\gamma_1 + \gamma_2 \circ 2\gamma_z$  est localement linéairement bornée, i.e. :  $\exists C > 0, \chi > 0$  satisfaisant*

$$\gamma_1(s) + \gamma_2 \circ 2\gamma_z(s) \leq Cs \quad \forall s \in [0, \chi], \quad (2.15)$$

*alors  $\vartheta$  peut être choisie telle que l'équilibre  $(x, z) = 0$  du système (2.12) bouclé avec  $u = \vartheta(x)$  est GAS.*



*Preuve* : voir Appendice C.  $\square$

**Remarque 2.4** La condition (2.14) n'est pas une hypothèse. En effet, puisque  $f$  est régulière, on peut toujours prendre localement deux fonctions  $\gamma_{1,f}$ ,  $\gamma_{2,f}$ , qui sont zéro en zéro, continues et non-décroissantes, comme suit :

$$\gamma_{1,f}(s) := \sup_{\{(z,x): |z| \leq s, |x| \leq s\}} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z, x) \right| \cdot s, \quad \gamma_{2,f}(s) := \sup_{\{z: |z| \leq s\}} |f(z, 0)|.$$

Ces deux fonctions vérifient (2.14). De plus, elles sont au moins susceptibles d'être garanties localement linéairement bornées. Ainsi c'est essentiellement (2.15) qui introduit la restriction que nous demandons pour obtenir la stabilité asymptotique. L'hypothèse (2.15) est vérifiée par exemple lorsque  $\gamma_z$  est dominée par une fonction linéaire près de 0.  $\square$

Dans l'intention d'établir un résultat général avec l'ajout d'une dynamique "multi-ISpS" dans le paragraphe suivant, on veut qu'il existe une loi de commande  $\vartheta(x)$  telle que le changement de loi de commande suivant :

$$u = \vartheta(x) + v$$

rende le système (2.12) non seulement GpS avec  $v = 0$  comme ci-dessus mais aussi ISpS avec  $v$  comme nouvelle entrée. C'est-à-dire, la propriété ISpS peut être propagée par l'ajout d'un intégrateur perturbé. Plus précisément, nous avons (Figure 2.1) :

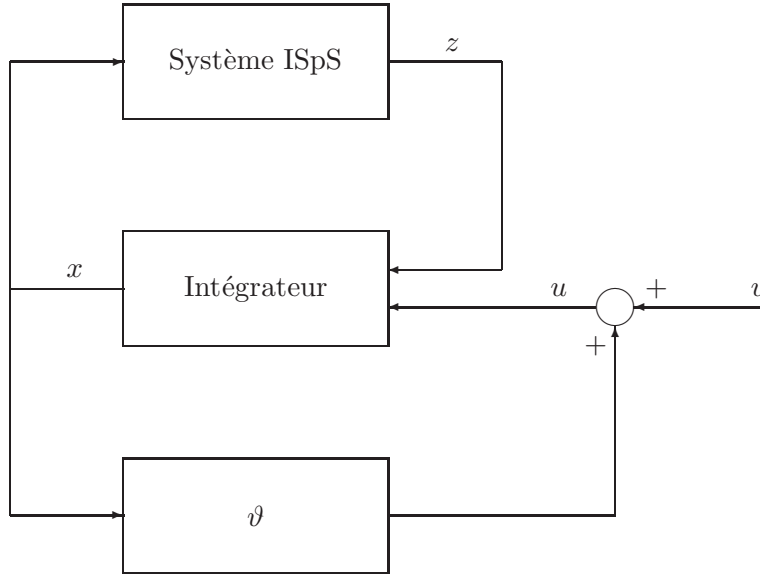


Figure 2.1: Ajout d'une dynamique ISpS

**Théorème 2.1** Si dans (2.12) le sous système  $z$  est ISpS avec  $x$  comme entrée, alors on peut trouver une loi de commande régulière par retour d'état partiel  $\vartheta(x)$ , avec  $\vartheta(0) = 0$ , telle qu'avec  $u = \vartheta(x) + v$  le système (2.12) est ISpS avec  $v$  comme entrée. En particulier, si  $f(0, 0) = 0$ , et si le sous système  $z$  est ISS avec la fonction associée  $\gamma_z$  de classe  $K$  telle qu'il existe une fonction régulière  $\alpha_f$  de classe  $K$  qui domine  $f(z, 0)$  i.e. :

$$|f(z, 0)| \leq \alpha_f(|z|) \quad \forall z \in \mathbb{R}^p, \quad (2.16)$$

et nous avons :

$$\alpha_f(2\gamma_z(s)) \leq k s \quad \forall s \in [0, \eta] \quad (2.17)$$

où  $\eta > 0$  et  $k > 0$  sont deux constantes connues, alors le système (2.12) avec  $u = \vartheta(x) + v$  devient ISS avec  $v$  comme entrée. De plus, si la matrice  $\frac{\partial h}{\partial z}(0, 0)$  est strictement Hurwitz, alors  $\vartheta$  peut être choisie telle que (2.17) est vérifiée et le contrôleur régulier par retour d'état partiel  $\vartheta(x)$  en boucle fermée avec (2.12) donne les propriétés GAS et LES (stabilité exponentielle locale).

*Preuve :* voir Appendice C. □

**Remarque 2.5** Comme ci-dessus le fait que  $f(0, 0) = 0$  et la régularité de  $f$  impliquent que  $\alpha_f$  est localement linéairement borné. Donc là encore, c'est (2.17) qui introduit la restriction que nous demandons pour obtenir la propriété ISS. (voir aussi Remarque 2.4) □

Pour des raisons de temps, nous n'avons pas pu compléter le théorème du petit gain 1.9 par un résultat sur la propagation de la propriété SpES. Donc, la preuve du théorème 2.1 sera fondée sur la version "état" du théorème du petit gain 1.9, i.e. le théorème 1.10.

L'intérêt du théorème 2.1 est la généralisation, au cas de bouclage d'état partiel ou au cas de dynamiques incertaines, la technique d'*ajout d'un intégrateur* (comparer à [76, Theorem 4]). Comme nous allons le voir dans le paragraphe 2.2.2, en ajoutant des intégrateurs dynamiquement perturbés au système (2.12), un résultat similaire au Théorème 2.1 existe pour un système nonlinéaire général qui ne satisfait plus la *condition de matching* (i.e. les incertitudes sont dans l'espace vectoriel engendré par les entrées). Pour établir ce résultat, nous aurons besoin de deux autres propriétés relatives à la notion ISpS :

Etant donné un système nonlinéaire :

$$\dot{x} = f(x, z, u) \quad (2.18)$$

$$\dot{z} = g(z, u), \quad (2.19)$$

nous avons :

**Proposition 2.4** Si le système (2.18) est ISpS (resp. ISS) avec  $(z, u)$  comme entrée et le système (2.19) est ISpS (resp. ISS) avec  $u$  comme entrée, alors le système entier (2.18)-(2.19) est ISpS (resp. ISS) avec  $u$  comme entrée. De plus, supposons que  $(x, z) = (0, 0)$  est un équilibre du système (2.18)-(2.19) avec  $u = 0$ , si l'équilibre  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x, 0, 0)$  et l'équilibre  $z = 0$  de  $\dot{z} = g(z, 0)$  sont LES, alors l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  de (2.18)-(2.19) avec  $u = 0$  est GAS et LES.

La preuve de la Proposition 2.4 est dans l'annexe C.

**Fait 2.1 :** Soient une application continue  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $\varphi(0) = 0$ , et un système nonlinéaire :

$$\dot{x} = f(x, v), \quad v \in \mathbb{R}^m \quad (2.20)$$

ISpS par rapport à  $v$ . Le système (2.20) est aussi ISpS par rapport à  $u$  quand  $v = \varphi(u)$ .

En effet, si  $(\beta, \gamma, d)$  sont données par l'hypothèse ISpS pour (2.20), alors le système

$$\dot{x} = f(x, \varphi(u))$$

est ISpS avec  $u$  comme entrée et  $(\beta, \gamma \circ \gamma_0, d)$  satisfaisant (1.44) où  $\gamma_0$ , de classe  $K$ , est définie par :

$$\gamma_0(s) = \sup_{|u| \leq s} \{|\varphi(u)|\} + s \quad \forall s \geq 0 .$$

Notons par contre que ce fait n'est pas significatif pour l'approche entrée-sortie classique (voir [15]). En effet, ceci était une motivation pour le papier [47] de Mareels-Hill. Prenons comme exemple le système suivant qui est entrée-sortie stable :

$$\dot{x} = -x + u, \quad y = x .$$

Il est *stable à gain  $L^\infty$  fini*, au sens que  $\exists c_i \geq 0$  ( $i = 1, 2$ ) tels que pour chaque  $u \in L_{\text{loc}}^\infty$  et chaque  $T \geq 0$  (fini), nous avons :

$$\|y_T\| \leq c_1 \|u_T\| + c_2 .$$

Mais en prenant  $\varphi(u) = u^3$ , le système résultant :

$$\dot{x} = -x + u^3, \quad y = x$$

n'est pas stable à gain  $L^\infty$  fini.

Maintenant, à la place de (2.12), on considère le cas où les perturbations  $\omega_1, \dots, \omega_n$  de la Proposition 2.2 sont augmentées par un système SpES avec  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme sortie, i.e. :

$$\begin{cases} \dot{z} = h(z, \xi_1) \\ \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = u + \omega_n \end{cases} \quad (2.21)$$

où les  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont des fonctions de  $z$  et de  $\xi_1$ .<sup>1</sup>

Nous nous proposons de trouver une loi de commande ne dépendant que de  $\xi_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) qui rend les solutions du système bouclé (2.21) bornées et, si possible, l'équilibre  $(z, \xi_1, \dots, \xi_n) = 0$  globalement asymptotiquement stable.

L'idée est la suivante : Si le sous système  $z$  de (2.21) ayant  $\xi_1$  comme entrée et  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme sortie est SpES avec un gain  $\gamma_\omega$  et possède la propriété ONB et/ou OFNB, nous choisissons une fonction  $\gamma$  de classe  $K_\infty$  telle que la condition du petit gain (1.41) soit vérifiée entre  $\gamma$  et  $\gamma_\omega$ . On applique alors la Proposition 2.2 d'assignation de gain  $\gamma$  au système composé de  $n$  intégrateurs perturbés :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = u + \omega_n . \end{cases} \quad (2.22)$$

On obtient ainsi une loi de commande  $L_u$  telle que, d'après le théorème 1.9 et la Remarque 2.3, avec

$$u = L_u(\xi_1, \dots, \xi_n) ,$$

<sup>1</sup>Sous cette condition, si le système  $z$  de (2.21) est ISS, il a les propriétés SES et OFNB.

le système bouclé (2.21) a les propriétés voulues.

Précisément, nous avons le théorème suivant qui résout notre problème.

**Théorème 2.2** *Si le sous système  $z$  de (2.21) ayant  $\xi_1$  comme entrée et  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme sortie est SpES avec le triplet  $(\beta_\omega, \gamma_\omega, d_\omega)$  et possède la propriété ONB, alors il existe une loi de commande  $L_u(\xi_1, \dots, \xi_n)$  telle que toutes les solutions du système bouclé (2.21) sont bornées. En particulier, si  $d_\omega = 0$  et il existe deux nombres réels  $\chi > 0$  et  $C > 0$  tels que :*

$$\gamma_\omega(s) \leq C s, \quad \forall s \in [0, \chi], \quad (2.23)$$

alors  $\xi_1(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

*De plus, si la propriété ONB est remplacée par OFNB, alors  $L_u$  peut être choisie telle que l'équilibre  $(\xi_1, \dots, \xi_n, z) = 0$  du système bouclé (2.21) est globalement asymptotiquement stable.*

*Preuve :* En appliquant la Proposition 2.2 au sous système  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  de (2.21) avec :

$$\gamma := \frac{1}{2}(2\gamma_\omega)^{-1} \quad (2.24)$$

et un  $\eta > 0$  quelconque, on obtient une loi de commande  $L_u$  qui rend le sous système (2.22) ayant  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme entrée et  $\xi_1$  comme sortie est SpES avec gain  $\gamma$ ; SpES devient SES si de plus (2.23) est vérifiée.

Grâce au choix de  $\gamma$  dans (2.24), la condition du petit gain (1.41) du théorème 1.9 est automatiquement satisfaite entre  $\gamma$  et  $\gamma_\omega$ . Notons que, grâce à la Remarque 2.3, les sous systèmes  $z$  et  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  de (2.21) possèdent clairement les propriétés ONB et/ou OFNB. Finalement, le théorème du petit gain 1.9 permet de conclure.  $\square$

**Notes bibliographiques.** La technique d'ajout d'un intégrateur est une grande contribution pour la théorie nonlinéaire. On peut classer les résultats existant dans la littérature dans les quatre sortes suivantes : la première est fondée sur une synthèse de Lyapunov, voir, par exemple, Tsinias [76]; la seconde sur un changement de variable, voir, par exemple, Byrnes-Isidori [7]; la troisième utilise les arguments de variétés centres, voir, Aeyels [2], Bacciotti [4]; la quatrième généralise la première en utilisant la théorie de passivité, voir, par exemple, Lozano, Brogliato et Landau [46] et les références qui s'y trouvent. Le théorème 2.1 est une généralisation de cette technique au cas de retour d'état partiel ou au cas de dynamique incertaine. La proposition 2.4 est inspirée d'un résultat de Sontag [70, Prop.7.2] qui dit que la composition en cascade de deux systèmes entrée-sortie stables (IOS) est encore IOS.

### 2.2.2 Ajout d'une multidynamique ISS

Nous allons considérer une classe de systèmes "proches" de (2.1) :

$$\begin{cases} \dot{z} &= h(z, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(z, x_1, \dots, x_i), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= u + f_n(z, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.25)$$

où  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée,  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  sont des composantes mesurées de l'état du système,  $z \in \mathbb{R}^m$  est la partie non-mesurée de l'état,  $h$  et  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont des fonctions régulières.

Pour faciliter notre présentation, dénotons :

$$X_i := (x_1, \dots, x_i) \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Nous supposons que  $h$  possède la structure triangulaire suivante : soit  $z_{i+1}$  un vecteur contenant toutes les composantes de  $z_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) et  $z_n$  le vecteur égal à  $z$ , nous supposons que  $\dot{z}_i$  vérifie :

$$\dot{z}_i = h_i(z_i, X_i), \quad z_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.26)$$

Le système (2.25) a une forme plus générale que les systèmes (2.12) et (2.21). Il est en fait composé du système rétroactif récurrent (2.1) augmenté par une dynamique  $z$  ayant elle-même une structure récurrente. En général, les hypothèses des théorèmes 2.1 et 2.2 ne sont plus vérifiées par (2.25).

Notre premier objectif est de trouver un contrôleur  $u$ , dépendant seulement de  $(x_1, \dots, x_n)$ , qui rend chaque trajectoire du système (2.25) globalement bornée.

Notre deuxième objectif est, dans le cas où le système (2.25) admet un équilibre, de rendre l'équilibre globalement asymptotiquement stable.

Pour gagner notre premier objectif, nous faisons les hypothèses suivantes sur le système (2.25) :

(H1) Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i(z, X_i) = f_i(z_i, X_i)$ .

(H2) Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ ,  $\dot{z}_i = h_i(z_i, X_i)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est ISpS avec  $X_i$  comme entrée, et  $(\beta_i, \gamma_i, d_i)$  satisfaisant (1.44). Lorsque  $d_i = 0$  pour tous les  $1 \leq i \leq n$ , les dynamiques  $z_i$  générées par (2.26) sont appelées *dynamiques inverses de type ISS* (voir [26]).

Pour atteindre notre deuxième objectif, nous aurons besoin d'une hypothèse plus forte que (H2) :

(H3) Pour chaque  $1 \leq i \leq n$ ,  $f_i(0) = 0$  et  $\dot{z}_i = h_i(z_i, X_i)$  est ISS avec  $X_i$  comme entrée, et la matrice  $\frac{\partial h_i}{\partial z_i}(0, 0)$  est strictement Hurwitz.

Pour résoudre notre problème, l'idée est d'utiliser récursivement le Théorème 2.1, la Proposition 2.4 et le Fait 2.1 établis au paragraphe 2.2.1 comme trois outils de base.

Etape 1 : Considérons d'abord le sous-système de (2.25) :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= h_1(z_1, x_1) \\ \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(z_1, x_1). \end{cases} \quad (2.27)$$

En appliquant le Théorème 2.1 au système (2.27), on obtient une fonction régulière  $\vartheta_1(x_1)$  qui est zéro en zéro et telle que, avec :

$$x_2 = \vartheta_1(x_1) + x_2^*,$$

le système (2.27) est ISpS avec  $x_2^*$  comme entrée. Dénotons :

$$x_1^* := x_1, \quad Z_1 := z_1, \quad H_1 := h_1.$$

Etape 2 : Considérons la nouvelle variable :

$$x_2^* = x_2 - \vartheta_1(x_1)$$

et définissons :

$$Z_2 := (z_2, (x_1^*, Z_1^\top)^\top)^\top.$$

$$\begin{cases} \dot{z}_2 &= h_2(z_2, x_1, x_2) \\ \dot{z}_1 &= h_1(z_1, x_1) \\ \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(z_1, x_1) \end{cases} \quad (2.28)$$
[illegible]
$$\dot{z}_2 = h_2(z_2, x_1, x_2)$$
$$\dot{z}_2 = h_2(z_2, x_1^*, \vartheta_1(x_1^*) + x_2^*)$$

D'autre part, notre changement de variables donne :

$$\dot{x}_2^* = x_3 + f_2(z_2, x_1, x_2) - \nabla \vartheta_1(x_1)(x_2 + f_1(z_1, x_1))$$

$$\dot{x}_2^* = x_3 + \widehat{f}_2(Z_2, x_2^*) \quad (2.30)$$
$$\tilde{f}_2(Z_2, x_2^*) = f_2(z_2, x_1^*, \vartheta_1(x_1^*) + x_2^*) - \nabla \vartheta_1(x_1^*)(\vartheta_1(x_1^*) + x_2^* + f_1(z_1, x_1^*)).$$
$$x_3 = \vartheta_2(x_2^*) + x_3^*,$$

Etape  $i$  ( $3 \leq i \leq n$ ) : Supposons que nous avons synthétisé une fonction  $\vartheta_{i-1}$  régulière telle que le système :

$$\begin{cases} \dot{Z}_{i-1} &= H_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*) \\ \dot{x}_{i-1}^* &= x_i + \tilde{f}_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*) \end{cases} \quad (2.31)$$

$$x_i^* = x_i - \vartheta_{i-1}(x_{i-1}^*) . \quad (2.32)$$

Ici, par induction,  $(x_1^*, \dots, x_{i-2}^*)$  sont des composantes de  $Z_{i-1}$ .

et définissons :

$$Z_i = (z_i, (x_{i-1}^*, Z_{i-1}^\top)^\top)^\top.$$

$$\begin{cases} \dot{z}_i &= h_i(Z_{i-1}, x_1, \dots, x_i) \\ \dot{Z}_{i-1} &= H_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*) \\ \dot{x}_{i-1}^* &= x_i + \tilde{f}_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*) \end{cases} \quad (2.33)$$
$$\dot{Z}_i = H_i(Z_i, x_i^*) := \begin{pmatrix} h_i(z_i, x_1^*, \vartheta_1(x_1^*) + x_2^*, \dots, \vartheta_{i-1}(x_{i-1}^*) + x_i^*) \\ \dots \\ \begin{pmatrix} x_i^* + \vartheta_{i-1}(x_{i-1}^*) + \tilde{f}_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*) \\ H_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*) \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$
$$\dot{z}_i = h_i(z_i, x_1^*, \vartheta_1(x_1^*) + x_2^*, \dots, \vartheta_{i-1}(x_{i-1}^*) + x_i^*)$$

D'autre part, notre changement de variables donne :

que nous réécrivons dans une forme compatible avec le Théorème 2.1 comme :

où  $\widetilde{f}_i$  est donné par

$$\tilde{f}_i(Z_i, x_i^*) = f_i(z_i, x_1^*, \vartheta_1(x_1^*) + x_2^*, \dots, \vartheta_{i-1}(x_{i-1}^*) + x_i^*) - \nabla \vartheta_{i-1}(x_{i-1}^*)(x_i^* + \tilde{f}_{i-1}(Z_{i-1}, x_{i-1}^*)).$$

$$x_{i+1} = \vartheta_i(x_i^*) + x_{i+1}^* ,$$

*Etape n :* Comme précédemment, nous obtenons une loi de commande  $\vartheta_n(x_n^*)$  telle que :

$$u = \vartheta_n(x_n^\star) + v \quad (2.36)$$

rend le système, dérivé des  $n - 1$  étapes précédentes :

$$\begin{cases} \dot{Z}_n &= H_n(Z_n, x_n^*) \\ \dot{x}_n^* &= u + \tilde{f}_n(Z_n, x_n^*) \end{cases} \quad (2.37)$$

est ISpS stable avec  $v$  comme entrée. En conséquence, les solutions  $(Z_n(t), x_n^*(t))$  de (2.37) avec :

$$u = \vartheta_n(x_n^*)$$

sont bornées. Et puisque l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n+m_1+\dots+m_n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m_1+\dots+m_n} \\ (x_n^*, Z_n) &\longmapsto (x_n, z_n, \dots, x_1, z_1) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme global qui préserve l'origine, ceci implique que pour chaque condition initiale, les solutions  $(z, x)$  du système bouclé (2.25) sont bornées. La borne ultime pour les coordonnées transformées  $(x_n^*, Z_n)$  dépend principalement des constantes  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) associées aux sous systèmes  $z_i$ . Mais pour les coordonnées originales  $(x_n, z_n, \dots, x_1, z_1)$ , leur borne ultime dépend aussi, et de plus d'une façon très compliquée, du contrôleur. Nous avons même la possibilité que, en essayant de forcer la borne ultime pour  $(x_n^*, Z_n)$  à tendre vers zéro, la borne ultime pour  $(x_n, z_n, \dots, x_1, z_1)$  tende vers l'infini. Ceci est le phénomène de "peaking". Par contre, si (H3) est vérifiée, le système (2.37) avec :

$$u = \vartheta_n(x_n^*) + v \quad (2.38)$$

est ISS avec  $v$  comme entrée et LES lorsque  $v$  est zéro.

En résumé, nous avons obtenu le résultat suivant :

**Proposition 2.5** *Sous les hypothèses (H1) et (H2), nous pouvons trouver un contrôleur régulier d'état partiel  $u(x_1, \dots, x_n)$  tel que toutes les trajectoires du système (2.25) en boucle fermée avec :*

$$u = u(x_1, \dots, x_n)$$

*sont bornées. De plus, si l'hypothèse (H3) est vérifiée, nous pouvons synthétiser un contrôleur globalement asymptotiquement stabilisant d'état partiel  $u(x_1, \dots, x_n)$  pour le système (2.25).*

**Remarque 2.6** Remarquons que nos trois mêmes outils – Théorème 2.1, Proposition 2.4 et le Fait 2.1 – peuvent être appliqués *de façon analogue* à une classe de systèmes nonlinéaires légèrement plus large que (2.25) :

$$\begin{cases} \dot{z} &= h(z, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_i &= g_i(z, x_1, \dots, x_n)x_{i+1} + f_i(z, x_1, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= g_n(z, x_1, \dots, x_n)u + f_n(z, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.39)$$

où les fonctions  $f_i$ 's,  $g_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $h$  satisfont :

1. Le sous  $z$ -système dans (2.39) possède la structure triangulaire définie par exemple dans (2.26).
2. Pour chaque  $i$ , la fonction  $f_i$  est majorée en norme par une fonction ne dépendant que de  $(z_i, X_i)$ .



3. Pour chaque  $i$ , la fonction  $g_i$  est de signe constante, disons positif et on aurait une borne inférieure strictement positive.

□

**Notes bibliographiques.** Pour les systèmes incertains satisfaisant une condition de rétroaction récurrente, les résultats existant dans la littérature appartiennent aux deux catégories : commande adaptative et commande non adaptative. Pour la version adaptative, consulter Kanelakopoulos, Kokotović et Morse [34], Marino-Tomei [50] et les références qui s’y trouvent. Pour la version non adaptative, consulter Marino-Tomei [50], Freeman-Kokotović [19] et les références qui s’y trouvent. Les résultats rapportés dans ce paragraphe étendent ces résultats au cas où des incertitudes dynamiques caractérisées ici par  $z$  sont présentes. Le phénomène de “peaking” a été étudié très spécialement par Sussmann et Kokotović [72].

## 2.3 Stabilisation globale par retour de sortie

### 2.3.1 Résultat principal: stabilisation globale

Nous venons de traiter un problème de stabilisation avec information incomplète de l’état. Cette restriction sur l’information résulte de dynamiques non modélisées. Nous considérons maintenant le cas où seule la sortie du système est disponible. Nous montrons l’application de la Proposition 2.2 et du Théorème 2.2 à une sous-classe de (2.25) où les fonctions  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) dépendent uniquement de la sortie  $y$  et des dynamiques incertaines  $z$ .

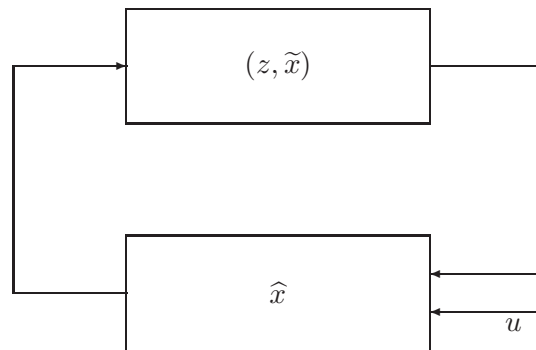
Plus précisément, notre problème est de construire un contrôleur dynamique par retour de sortie stabilisant le système nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= h(z, y) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(z, y), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= u + f_n(z, y) \\ y &= x_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

où les fonctions  $f_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) et  $h$  sont régulières avec :

$$f_i(0, 0) = 0, \quad h(0, 0) = 0. \quad (2.41)$$

On va résoudre ce problème en introduisant un “observateur” des composantes  $(x_1, \dots, x_n)$  et une commande de sorte que le système bouclé puisse être représenté par l’interconnexion (où  $\tilde{x}$  signifie l’erreur de l’observation) :



à laquelle on applique le théorème du petit gain, ou plus précisément notre outil “Théorème 2.2”. En effet, en prenant pour “observateur” de  $(x_1, \dots, x_n)$  le système suivant <sup>2</sup>:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i &= \hat{x}_{i+1} + k_i(y - \hat{x}_1), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{x}}_n &= u + k_n(y - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (2.42)$$

où  $k_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sont des gains de Hurwitz, nous obtenons un système d’erreur étendu défini par :

$$\begin{cases} \dot{z} &= h(z, y) \\ \dot{\tilde{x}} &= A\tilde{x} - (f_1(z, y), \dots, f_n(z, y))^T \end{cases} \quad (2.43)$$

avec  $\tilde{x} = \hat{x} - x$  et  $A$  strictement Hurwitz. Donc le système bouclé est constitué du système d’erreur étendu (2.43) et d’un observateur commandé (2.42) récrit comme :

$$\begin{cases} \dot{y} &= \hat{x}_2 + \omega_1(\tilde{x}, z, y) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \omega_2(\tilde{x}, z, y) \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_n &= u + \omega_n(\tilde{x}, z, y) \end{cases} \quad (2.44)$$

où les  $\omega_i$  sont donnés par :

$$\omega_1(\tilde{x}, z, y) = x_2 - \hat{x}_2 + f_1(z, y), \quad \omega_i(\tilde{x}, z, y) = k_i(y - \hat{x}_1), \quad 2 \leq i \leq n. \quad (2.45)$$

Remarquons que le système (2.43)-(2.44) est sous la forme de (2.21). Nous allons montrer que les hypothèses du théorème 2.2 sont satisfaites par (2.43)-(2.44).

Nous démontrons en premier lieu que le système d’erreur étendu (2.43) ayant  $y$  comme entrée et  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme sortie est SES si le système  $\dot{z} = h(z, y)$  avec  $y$  comme entrée et  $(f_1(z, y), \dots, f_n(z, y))$  comme sortie est SES. En effet, quelles que soient les conditions initiales  $(z_0, \tilde{x}_0)$  et une fonction  $y(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée (pour simplifier les notations, on ne considère pas le cas où  $y(t)$  est mesurable et essentiellement bornée), il existe une solution unique  $(z(t), \tilde{x}(t))$  de (2.43), définie maximale sur  $[0, T)$  et satisfaisant, pour tout  $t$  dans  $[0, T)$  :

$$|(f_1(z(t), y(t)), \dots, f_n(z(t), y(t)))^T| \leq \beta_z(|z_0|, t) + \gamma_z\left(\sup_{\tau \in [0, t]} \{|y(\tau)|\}\right), \quad (2.46)$$

$$|\tilde{x}(t)| \leq K_1 e^{-k_0 t} |\tilde{x}_0| + K_2 \int_0^t e^{-k_0(t-\tau)} (\beta_z(|z_0|, \tau) + \gamma_z(\|y_\tau\|)) d\tau \quad (2.47)$$

où  $k_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  sont trois réels positifs. (2.46) et (2.47) fournissent une fonction  $\beta_x$  de classe  $KL$  telle que :

$$|\tilde{x}(t)| \leq \beta_x\left(\left|\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ z_0 \end{pmatrix}\right|, t\right) + \frac{K_2}{k_0} \gamma_z\left(\sup_{\tau \in [0, t]} \{|y(\tau)|\}\right) \quad (2.48)$$

où l’expression explicite de  $\beta_x$  est donnée par :

$$\beta_x(s, t) = e^{-k_0 t} \left( K_1 s + \frac{K_2}{k_0} \beta_z(s, 0) \right) + K_2 \int_0^t e^{-k_0(t-\tau)} \beta_z(s, \tau) d\tau. \quad (2.49)$$

---

<sup>2</sup>On considère ici un observateur d’ordre plein. Pour obtenir un observateur d’ordre réduit, il suffit de suivre la procédure dans [49, 36].

Puisque (2.43) est un système stationnaire, (2.46) et (2.48) sont aussi vérifiées pour n'importe quelle condition initiale en n'importe quel instant initial. On en déduit que les incertitudes  $\omega_i$ , définies par (2.45), satisfont, pour  $0 \leq t_0 \leq t$ ,<sup>3</sup>

$$|(\omega_1(t), \dots, \omega_n(t))^\top| \leq \beta_\omega \left( \left| \begin{pmatrix} \tilde{x}(t_0) \\ z(t_0) \end{pmatrix} \right|, (t - t_0) \right) + \gamma_\omega \left( \sup_{\tau \in [t_0, t]} \{|y(\tau)|\} \right) \quad (2.50)$$

où les fonctions  $\beta_\omega$  de classe  $KL$  et  $\gamma_\omega$  de classe  $K$  sont définies par :

$$\beta_\omega(s, t) := K_3 \beta_x(s, t) + \beta_z(s, t), \quad \gamma_\omega(s) := \left( \frac{K_2 K_3}{k_0} + 1 \right) \gamma_z(s) \quad (2.51)$$

où  $K_3 = \max\{1, k_2, \dots, k_n\}$ . En conséquence, (2.43) ayant  $y$  comme entrée et  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme sortie est SES.

Finalement, vu (2.51), si  $\gamma_z$  est localement linéairement borné, (2.23) est vérifiée.

En conclusion, nous avons établi avec le théorème 2.2 le résultat suivant :

**Théorème 2.3** *Supposons que le sous système  $z$  de (2.40) ayant  $y$  comme entrée et  $(f_1, \dots, f_n)$  comme sortie est SES avec un couple de fonctions  $(\beta_z, \gamma_z)$  et possède la propriété ONB. En outre si  $\gamma_z$  est localement linéairement borné, on peut trouver un contrôleur dynamique par retour de sortie qui rende les solutions de (2.40) en boucle fermée bornées et la sortie  $y(t)$  convergant vers 0.*

*De plus, si la propriété OFNB est vérifiée, l'équilibre  $(z, x_1, \dots, x_n) = 0$  de (2.40) peut être rendu GAS.*

**Notes bibliographiques.** La stabilisation par retour de sortie est un problème important pour la pratique. La classe de systèmes nonlinéaires ayant une forme normale dont les nonlinéarités ne dépendent que de la sortie a été la première considérée par Krener-Isidori [39]. Marino-Tomei [48] ont donné les conditions nécessaires et suffisantes qui ramènent *globalement* un système nonlinéaire mono-entrée mono-sortie à un système linéaire, observable et à déphasage minimale. Khalil-Saberi [38] ont proposé un contrôleur dynamique à grand gain par retour de sortie qui stabilise globalement un système multi-entrée multi-sortie lorsque les champs de vecteurs du système sont globalement Lipschitz et les dynamiques des zéros sont globalement exponentiellement stables. Dans le cas où le système (2.40) a la forme particulière suivante :

$$h(z, y) := Hz + G(y), \quad f_i(z, y) := \bar{f}_i(y), \quad (1 \leq i < n), \quad f_n(z, y) := Fz + \bar{f}_n(y),$$

des solutions récentes au problème de stabilisation globale par retour de sortie ont été obtenues par Marino-Tomei [48, 49], Kanellakopoulos-Kokotović-Morse [36]. Notre résultat est une extension de ces résultats.

### 2.3.2 Exemple

Considérons le système nonlinéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= -z^3 + x_1^3 \\ \dot{x}_1 &= x_2 + \frac{1}{15}zx_1 \\ \dot{x}_2 &= u \\ y &= x_1. \end{cases} \quad (2.52)$$

<sup>3</sup>Pour simplifier les notations, dénotons  $\omega_i(t) := \omega_i(\tilde{x}(t), z(t), y(t))$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

D'après l'algorithme de Sontag relatif à la propriété ISS (voir Appendice A), nous constatons que le système

$$\dot{z} = -z^3 + x_1^3$$

est ISS par rapport à  $x_1$  avec :

$$\beta(s, t) = \sqrt{\frac{s^2}{1 + s^2 t}}, \quad \gamma(s) = 2^{\frac{1}{3}} s.$$

Notons que  $\gamma$  est linéaire. On conclut que toutes les hypothèses du théorème 2.3 sont satisfaites. Ainsi il existe un contrôleur dynamique régulier par retour de sortie qui rend l'équilibre  $(x_1, x_2, z) = (0, 0, 0)$  globalement asymptotiquement stable.

Nous fournissons un tel contrôleur au moyen de la Proposition 2.2 et du théorème 2.2. Pour cela, considérons l'observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + 3(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = u + 2(y - \hat{x}_1). \end{cases}$$

Le système bouclé venant de (2.52) est constitué du système d'erreur étendu suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} = -z^3 + y^3 \\ \dot{\tilde{x}}_1 = -3\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 - \frac{1}{15}zy \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -2\tilde{x}_1. \end{cases} \quad (2.53)$$

et du système commandé suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = \hat{x}_2 - \tilde{x}_2 + \frac{1}{15}zy \\ \dot{\hat{x}}_2 = u - 2\tilde{x}_1. \end{cases} \quad (2.54)$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\omega_1 := x_2 - \hat{x}_2 + \frac{1}{15}zy, \quad \omega_2 := 2(y - \hat{x}_1),$$

et donc (2.50) est satisfaite avec :

$$k_0 = 1, \quad K_2 = 7, \quad K_3 = 2.$$

Notons que le système (2.53) ayant  $y$  comme entrée et  $(\omega_1, \omega_2)$  comme sortie est SES avec gain  $\gamma_\omega$  défini par :

$$\gamma_\omega(s) = 2 \left(1 + 2^{2/3}\right) s^2.$$

Puis, pour assigner le gain  $\frac{1}{2}(2\gamma_\omega)^{-1}$  au système (2.54), nous suivons la procédure de synthèse dans la preuve de la Proposition 2.2 (voir Appendice C). Remarquons qu'en choisissant :

$$V_1(y) = 887 \left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)^2 y^4, \quad u_0(y) = -\frac{1}{4}y,$$

l'inégalité (C.62) est satisfaite avec  $\gamma = \frac{1}{2}(2\gamma_\omega)^{-1}$  et  $\eta = 0$ . Donc en utilisant la procédure systématique dans la preuve de la Proposition 2.2, nous avons :

$$\begin{aligned} u_{11}(y) &= -\frac{1}{4}y, \quad u_{12}(y) = u_{11}(y) - 887 \left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)^2 y^3, \\ u_{21}(y, \hat{x}_2) &= \frac{1}{2}(\hat{x}_2 - u_{12}(y)) - 3548 \left(1 + 2^{\frac{2}{3}}\right)^2 y^3 + \frac{\partial u_{12}}{\partial y}(y) \hat{x}_2 \\ &\quad - \frac{1}{4}(\hat{x}_2 - u_{12}(y)) \left(\frac{\partial u_{12}}{\partial y}(y)\right)^2, \\ u_{22}(y, \hat{x}_2) &= u_{21}(y, \hat{x}_2) - \frac{1}{4}(\hat{x}_2 - u_{12}(y)). \end{aligned}$$

Par conséquent, le contrôleur dynamique par retour de sortie suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + 3(y - \hat{x}_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 &= u + 2(y - \hat{x}_1) \\ u &= u_{22}(y, \hat{x}_2) \end{cases}$$

stabilise globalement et asymptotiquement (2.52).

**Commentaires.** Puisque (2.53)-(2.54) est dans une forme par bouclage d'état partiel (2.25) et que le sous système (2.53) est ISS avec  $y$  comme entrée (voir (2.46)-(2.48)), la procédure de synthèse établie à la Section 2.2.2 peut être aussi appliquée au système (2.53)-(2.54). Malheureusement, puisque l'hypothèse (H3) de la section 2.2 n'est pas vérifiée par (2.53), la procédure du paragraphe 2.2.2 donne un contrôleur dynamique par retour de sortie qui ne garantit pas forcément la convergence asymptotique, mais garantit seulement la bornitude des solutions du système bouclé (2.52). Aussi, nous constatons que la procédure du paragraphe 2.2.2 donne des calculs plus compliqués que celle dans la section 2.3.

### 2.3.3 Quelques généralisations

Ce paragraphe a pour but de généraliser les résultats du paragraphe 2.3.1 aux trois cas suivants : le cas instationnaire, le cas de la poursuite et le cas multi-sorties.

#### 1. Le cas instationnaire

La méthode présentée dans la section 2.3 peut s'étendre facilement au cas instationnaire. A la place de (2.40), nous considérons le système nonlinéaire instationnaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{z} &= h(z, y, t) \\ \dot{x}_i &= x_{i+1} + f_i(z, y, t), \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{x}_n &= u + f_n(z, y, t) \\ y &= x_1. \end{cases} \quad (2.55)$$

Pour stabiliser globalement ce système par retour de sortie, nous suivons pas à pas les mêmes étapes exposées dans le paragraphe 2.3.1. Nous pouvons rétablir sans aucune difficulté le théorème 2.3 pour (2.55) aux conditions suivantes :

(C1) Le sous système  $z$  de (2.55) ayant  $y$  comme entrée et  $(f_1, \dots, f_n)$  comme sortie est SES, c'est-à-dire qu'il existe une fonction  $\beta_z$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma_z$  de classe  $K$  telles que pour chaque instant initial  $t_0$ , chaque condition initiale  $z_0$  et chaque entrée  $y$  mesurable, essentiellement bornée et définie sur  $[t_0, +\infty)$ , la solution associée  $z(t)$  existe pour tous les  $t \geq t_0$  et satisfait :  $\forall t_0 \leq s \leq t < \infty$ ,

$$|(f_1(t), \dots, f_n(t))^\top| \leq \beta_z(|z(s)|, t-s) + \gamma_z \left( \sup_{\tau \in [s, t]} |y(\tau)| \right) \quad (2.56)$$

où  $f_i(t) := f_i(z(t), y(t), t)$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

(C2) Ce système  $z$  a la propriété OFNB et le gain  $\gamma_z$  est localement linéairement borné.

Nous avons (voir la Remarque 1.6) :

**Théorème 2.3 (bis)** *Supposons que les hypothèses (C1) et (C2) sont satisfaites, nous pouvons trouver un contrôleur dynamique par retour de sortie qui rend l'origine du système bouclé (2.55) globalement asymptotiquement stable.*

**Notes bibliographiques.** La notion ISS pour les systèmes instationnaires a été donnée dans Lin [45, Section 5.1.2]. La notion de SES pour les systèmes instationnaires peut être présentée comme dans (C1).

## 2. Le cas de la poursuite

Nos analyses établies au paragraphe 2.3.1 peuvent s'étendre au problème de poursuite en supposant que  $h$  dans (2.40) satisfait la propriété suivante :

(P1)  $h(0) = 0$  et quels que soient deux signaux  $z_r(t)$ ,  $y_r(t)$  définis sur  $[0, +\infty)$ , continus et bornés, le système suivant :

$$\dot{\bar{z}} = h(\bar{z} + z_r, y_r + v) - h(z_r, y_r) \quad (2.57)$$

est ISS avec  $v \in \mathbb{R}$  comme entrée.

Notons que (P1) implique en particulier que  $\dot{z} = h(z, v)$  est ISS avec  $v$  comme entrée.

Le problème de poursuite est le suivant : trouver un contrôleur par retour de sortie de manière à forcer la sortie  $y$  de (2.40) à poursuivre un signal de référence  $y_r(t)$  dont les  $n$  premières dérivées  $y_r^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq n$ ) sont bornées sur  $[0, \infty)$  et  $y_r^{(n)}$  est continue par morceau.

Considérons un tel signal de référence  $y_r(t)$ . Introduisons un signal  $z_r$  engendré par  $y_r$  :

$$\dot{z}_r = h(z_r, y_r), \quad z_r(0) = 0. \quad (2.58)$$

Puisque  $y_r$  est borné et que (2.58) est ISS par rapport à  $y_r$ , le signal *connu*  $z_r(t)$  est défini sur  $[0, +\infty)$  et borné. Dénotons :

$$\bar{z} := z - z_r, \quad \bar{x}_1 := y - y_r. \quad (2.59)$$

On observe que  $\bar{z}$  satisfait :

$$\dot{\bar{z}} = h(\bar{z} + z_r, y_r + \bar{x}_1) - h(z_r, y_r) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{h}(\bar{z}, \bar{x}_1, t). \quad (2.60)$$

Selon l'hypothèse (P1), ce système est ISS avec  $\bar{x}_1$  comme entrée. Soit  $\gamma_{\bar{z}}$  la fonction de gain associée à la propriété ISS.

Vu (2.40)-(2.59), nous avons :

$$\dot{\bar{x}}_1 = x_2 - \dot{y}_r + f_1(\bar{z} + z_r, y) . \quad (2.61)$$

Définissant  $\bar{x}_2$  et  $\bar{f}_1$  par :

$$\begin{aligned} \bar{x}_2 &:= x_2 - \dot{y}_r + f_1(z_r, y_r) \stackrel{\text{def}}{=} x_2 - \varphi_1(y_r, \dot{y}_r) , \\ \bar{f}_1(\bar{z}, \bar{x}_1, t) &:= f_1(\bar{z} + z_r, \bar{x}_1 + y_r) - f_1(z_r, y_r) , \end{aligned}$$

l'équation (2.61) se réécrit comme :

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2 + \bar{f}_1(\bar{z}, \bar{x}_1, t) . \quad (2.62)$$

Notons que  $\bar{f}_1(0, 0) = 0$ . Supposons que, pour  $1 \leq i \leq n-1$ , nous ayons établi les variables  $\bar{x}_j$  ( $2 \leq j \leq i+1$ ), les fonctions  $\bar{f}_j$  et  $\varphi_j$  ( $1 \leq j \leq i$ ) telles que :

$$\bar{x}_{j+1} := x_{j+1} - \varphi_j(y_r, \dots, y_r^{(j)}) , \quad \bar{f}_j(0, 0) = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq i$$

et pour chaque  $1 \leq j \leq i$ ,

$$\dot{\bar{x}}_j = \bar{x}_{j+1} + \bar{f}_j(\bar{z}, \bar{x}_1) . \quad (2.63)$$

La dérivée de  $\bar{x}_{i+1}$  le long des solutions de (2.40) est :

$$\dot{\bar{x}}_{i+1} = x_{i+2} + f_{i+1}(z, y) - \sum_{j=0}^i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} \quad (2.64)$$

où par convention  $x_{n+1} = u$ . Définissant  $\bar{x}_{i+2}$  et  $\bar{f}_{i+1}$  par :

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i+2} &:= x_{i+2} + f_{i+1}(z_r, y_r) - \sum_{j=0}^i \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_r^{(j)}} y_r^{(j+1)} \stackrel{\text{def}}{=} x_{i+2} - \varphi_{i+1}(y_r, \dots, y_r^{(i+1)}) , \\ \bar{f}_{i+1}(\bar{z}, \bar{x}_1, t) &:= f_{i+1}(\bar{z} + z_r, \bar{x}_1 + y_r) - f_{i+1}(z_r, y_r) , \end{aligned}$$

avec  $\bar{f}_{i+1}(0, 0, t) = 0$ , nous réécrivons (2.64) comme :

$$\dot{\bar{x}}_{i+1} = \bar{x}_{i+2} + \bar{f}_{i+1}(\bar{z}, \bar{x}_1, t) . \quad (2.65)$$

Par récurrence, vu (2.60), (2.62), (2.63) et (2.65), nous avons obtenu le système :

$$\begin{cases} \dot{\bar{z}} &= \bar{h}(\bar{z}, \bar{x}_1, t) \\ \dot{\bar{x}}_i &= \bar{x}_{i+1} + \bar{f}_i(\bar{z}, \bar{x}_1, t) , \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\bar{x}}_n &= v + \bar{f}_n(\bar{z}, \bar{x}_1, t) \\ \bar{y} &:= \bar{x}_1 \end{cases} \quad (2.66)$$

où  $v = \bar{x}_{n+1} := u - \varphi_n(y_r, \dots, y_r^{(n)})$ . Notons que le sous système  $\bar{z}$  est ISS avec  $\bar{x}_1$  comme entrée et le gain  $\gamma_{\bar{z}}$  donné par la propriété ISS.

Maintenant, le système (2.66) est dans une forme compatible avec (2.55). Pour pouvoir utiliser le théorème 2.3 (bis) à (2.66), en plus de (P1), nous avons besoin de :

(P2) Il existe deux fonctions  $\gamma_{1,f}, \gamma_{2,f}$  de classe  $K$  telles que :

$$|f_i(\bar{z} + z_r, \bar{x}_1 + y_r) - f_i(z_r, y_r)| \leq \gamma_{1,f}(|\bar{x}_1|) + \gamma_{2,f}(|\bar{z}|), \quad \forall i, \forall \bar{z}, \bar{x}_1 \quad (2.67)$$

où  $z_r$  est défini par (2.58). Aussi, la fonction

$$\gamma_{1,f}(s) + \gamma_{2,f}(2\gamma_{\bar{z}}(s))$$

est linéairement bornée sur un voisinage de 0.

D'après les définitions précédentes de  $\bar{f}_i$ , cette propriété (P2) implique immédiatement que les hypothèses du théorème 2.3 (bis) sont vérifiées par (2.66). Le théorème 2.3 (bis) nous donne un contrôleur dynamique par retour de sortie qui rend l'équilibre  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{z}) = 0$  du système bouclé (2.66) GAS. Ceci implique que toutes les solutions  $(x_1(t), \dots, x_n(t), z(t))$  du système original bouclé (2.40) sont bornées, et l'erreur de sortie  $y(t) - y_r(t)$  converge vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

Enfin, il faudrait mieux écrire explicitement le contrôleur pour qu'on se rende compte de ce que l'on a utilisé. En particulier, puisque  $\bar{x}_1 = y - y_r$ , on peut l'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i = \hat{x}_{i+1} + k_i(\bar{x}_1 - \hat{x}_1), & 1 \leq i \leq n-1 \\ \dot{\hat{x}}_n = v + k_n(\bar{x}_1 - \hat{x}_1) \end{cases} \quad (2.68)$$

où  $k_i (1 \leq i \leq n)$  sont des gains de Hurwitz. On n'aurait besoin que de  $y_r$  mais en fait pour obtenir la vraie commande  $u$  il faut faire le changement :

$$u = v + \varphi_n(y_r, \dots, y_r^{(n)}).$$

**Notes bibliographiques.** Le problème de poursuite a été traité aussi par Marino et Tomei [48, 51, 52], Kanellakopoulos, Kokotović et Morse [36] dans le cas où  $h$  de (2.40) est linéaire en  $z$ , i.e. :

$$h(z, y) = Hz + G(y) \quad (2.69)$$

avec  $H$  strictement Hurwitz. Dans ces cas, un contrôleur par retour d'état *complet* dans (2.66) est utilisé, à savoir que  $\bar{z}$  est remplacé par une estimée. Marino et Tomei aussi donne une autre méthode dans [52] qui, comme ici, au lieu d'observer l'état  $\bar{z}$ , donne un contrôleur robuste rejetant cette perturbation dynamique. Dans leur cas, la nonlinéarité  $G$  de (2.69) peut aussi contenir des incertitudes paramétriques.

Lorsque (2.69) est vérifiée, les signaux  $z_r$  et  $\bar{z}$  peuvent être définis par :

$$\dot{z}_r = Hz_r + G(y_r), \quad z_r(0) = 0, \quad (2.70)$$

$$\dot{\bar{z}} = H\bar{z} + G(\bar{x}_1 + y_r) - G(y_r), \quad \bar{z}(0) = z(0), \quad (2.71)$$

et nous avons :

$$z = \bar{z} + z_r.$$

Si  $H$  est strictement Hurwitz, le système (2.71) est ISS avec  $\bar{x}_1$  comme entrée et une fonction de gain  $\gamma_{\bar{z}}$  localement linéairement bornée. D'où les propriétés (P1) et (P2) sont remplies en cas de (2.69).

### 3. Le cas multi-sorties



On considère ici, à la place de (2.40) mono-entrée mono-sortie, un système mono-entrée multi-sorties. Pour simplifier la présentation, nous nous limitons au cas de deux sorties. Mais le cas général est identique. Le système que nous allons étudier est dans une forme globale suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= h_1(z_1, x_1) \\
 \dot{x}_1 &= x_2 + f_1(z_1, x_1) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n_1} &= x_{n_1+1} + f_{n_1}(z_1, x_1) \\
 \dot{z}_2 &= h_2(z_2, x_1, \dots, x_{n_1+1}) \\
 \dot{x}_{n_1+1} &= x_{n_1+2} + f_{n_1+1}(z_2, x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n_2} &= u + f_{n_2}(z_2, x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}) \\
 y &= (x_1, x_{n_1+1})^\top, \quad y \in \mathbb{R}^2
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

où  $x_i \in \mathbb{R}$  ( $1 \leq i \leq n_2$ ) et  $z_i \in \mathbb{R}^{p_i}$  ( $i = 1, 2$ ) constituent l'état,  $u \in \mathbb{R}$  est l'entrée, et  $y \in \mathbb{R}^2$  représente la sortie qui est la *seule* variable disponible pour la commande. Remarquons que ce système (2.72) satisfait la *condition de rétroaction récurrente* (voir [35]), mais nous autorisons les fonctions  $f_i$  à dépendre des états non-mesurables  $x_j$ .

Notre objectif est de synthétiser un contrôleur dynamique par retour de sortie qui rend l'équilibre  $(x_1, \dots, x_{n_2}, z_1, z_2) = 0$  du système (2.72) en boucle fermée GAS.

Nous faisons les hypothèses suivantes sur le système (2.72) :

(D1)  $\dot{z}_1 = h_1(z_1, x_1)$  est ISS avec  $x_1$  comme entrée, et la matrice  $\partial h_1 / \partial z_1(0, 0)$  est strictement Hurwitz.

(D2)  $\dot{z}_2 = h_2(z_2, x_1, \dots, x_{n_1+1})$  est ISS avec  $(x_1, \dots, x_{n_1+1})$  comme entrée, et  $\partial h_2 / \partial z_2(0, 0)$  est une matrice strictement Hurwitz.

Dans la suite, nous présentons notre procédure "étape par étape" :

Etape I : Considérons d'abord le sous système de (2.72) ayant  $x_{n_1+1}$  comme entrée et  $x_1$  comme sortie :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = h_1(z_1, x_1) \\ \dot{x}_1 = x_2 + f_1(z_1, x_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n_1} = x_{n_1+1} + f_{n_1}(z_1, x_1) \end{array} \right. \tag{2.73}$$

Pour ce système avec une simple sortie, on applique la méthode du paragraphe 2.3.1. On décompose le système (2.73) en un système d'erreur étendu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = h_1(z_1, x_1) \\ \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} - (f_1(z_1, x_1), \dots, f_{n_1}(z_1, x_1))^\top \end{array} \right. \tag{2.74}$$

et un observateur commandé dont l'état est connu :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \hat{x}_2 - \tilde{x}_2 + f_1(z_1, x_1) \\ \dot{x}_2 &= \hat{x}_3 - k_2 \tilde{x}_1 \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n_1} &= x_{n_1+1} - k_{n_1} \tilde{x}_1 \end{cases} \quad (2.75)$$

où  $\tilde{x}_i = \hat{x}_i - x_i$  ( $1 \leq i \leq n_1$ ), les  $k_i$  sont des gains de Hurwitz et  $A$  est une matrice strictement Hurwitz. Comme nous l'avons observé dans le paragraphe 2.3.2, avec la condition (D1), le système (2.74) est ISS avec  $x_1$  comme entrée. Aussi le système (2.74)-(2.75) est sous forme de bouclage d'état partiel (2.25). Maintenant, en appliquant au système (2.74)-(2.75) la synthèse présentée dans la Section 2.2, nous obtenons une fonction régulière  $\vartheta_{n_1}$  dépendant de  $(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n_1})$ , qui est zéro en zéro, telle qu'avec :

$$x_{n_1+1} := \vartheta_{n_1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n_1}) + x_{n_1+1}^*,$$

le système (2.74)-(2.75) est ISS avec  $x_{n_1+1}^*$  comme entrée.

En résumé, en dénotant :

$$Z_1 := (z_1, \tilde{x}, x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n_1}),$$

sous la condition (D1), nous obtenons le système ISS avec  $x_{n_1+1}^*$  comme entrée :

$$\dot{Z}_1 = H_1(Z_1, x_{n_1+1}^*) \quad (2.76)$$

où la fonction  $H_1$  est implicitement définie par (2.74)-(2.75).

Etape II : Considérons la nouvelle variable :

$$x_{n_1+1}^* := x_{n_1+1} - \vartheta_{n_1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n_1})$$

et définissons :

$$Z_2 := (z_2, Z_1^\top)^\top.$$

Vu (2.76) et (2.72), nous obtenons :

$$\dot{Z}_2 = H_2(Z_2, x_{n_1+1}^*) := \begin{pmatrix} h_2(z_2, x_1, \dots, x_{n_1}, \vartheta_{n_1}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n_1}) + x_{n_1+1}^*) \\ H_1(Z_1, x_{n_1+1}^*) \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

D'après la condition (D2), le Fait 2.1 et la Proposition 2.4 du paragraphe 2.2.1, le système (2.77) est ISS avec  $x_{n_1+1}^*$  comme entrée.

D'autre part, la dérivée temporelle de  $x_{n_1+1}^*$  s'exprime comme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n_1+1}^* &= x_{n_1+2} + f_{n_1+2}(z_2, x_1, \dots, x_{n_1}, x_{n_1+1}) - \frac{\partial \vartheta_{n_1}}{\partial x_1}(\hat{x}_2 - \tilde{x}_2 + f_1(z_1, x_1)) \\ &\quad - \sum_{j=2}^{n_1} \frac{\partial \vartheta_{n_1}}{\partial x_j}(x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)(\hat{x}_{j+1} - k_j \tilde{x}_1) \\ &:= x_{n_1+2} + f_{n_1+2}^*(Z_2, x_{n_1+1}^*). \end{aligned} \quad (2.78)$$

D'une façon similaire, les sous  $x_j$ -systèmes de (2.72) ( $n_1 + 2 \leq j \leq n_2$ ) peuvent être transformés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_{n_1+2} &= x_{n_1+3} + f_{n_1+2}^*(Z_2, x_{n_1+1}^*) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_2} &= u + f_{n_2}^*(Z_2, x_{n_1+1}^*) .\end{aligned}$$

Enfin, nous obtenons le système transformé ayant  $u$  comme entrée et  $x_{n_1+1}^*$  comme sortie :

$$\begin{aligned}\dot{Z}_2 &= h_2^*(Z_2, x_{n_1+1}^*) \\ \dot{x}_{n_1+1}^* &= x_{n_1+2} + f_{n_1+2}^*(Z_2, x_{n_1+1}^*) \\ \dot{x}_{n_1+2} &= x_{n_1+3} + f_{n_1+2}^*(Z_2, x_{n_1+1}^*) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n_2} &= u + f_{n_2}^*(Z_2, x_{n_1+1}^*) .\end{aligned} \tag{2.79}$$

Pour ce système (2.79), il est assez facile de vérifier que les conditions (D1) et (D2) sont vérifiées. En répétant le cheminement dans l'étape I, nous obtenons un contrôleur dynamique par retour de sortie qui stabilise globalement asymptotiquement le système (2.79). Finalement, puisque le système (2.74)-(2.75) est ISS par rapport à  $x_{n_1+1}^*$  (selon l'étape I), ce même contrôleur stabilise globalement asymptotiquement le système de départ (2.72).

En conclusion, nous avons démontré le théorème suivant :

**Théorème 2.3 (ter).** *Sous les hypothèses (D1) et (D2), nous pouvons trouver un contrôleur dynamique par retour de sortie  $u(y, \chi)$ , avec  $\dot{\chi} = \kappa(\chi, y)$ , tel que l'origine du système (2.72) est un équilibre globalement et asymptotiquement stable.*

**Notes bibliographiques.** La classe de systèmes nonlinéaires (2.72) satisfait la condition de rétroaction récurrente posée par Kanellakopoulos, Kokotović et Morse [35]. Leurs résultats dépendent implicitement des hypothèses suivantes :

- Les dynamiques des zéros sont *linéaires* et asymptotiquement stables quand les états du système des dynamiques des zéros ne sont pas connus, ou *nonlinéaire* quand ces états sont utilisables.
- Les nonlinéarités dépendent seulement de la sortie (mesurable)  $y = (x_1, x_{n_1+1})$ , pas les composantes d'état non-mesurables  $(x_2, \dots, x_{n_1})$ .

Ces hypothèses sont relâchées ici.

## 2.4 Stabilisation adaptative de systèmes nonlinéaires avec dynamiques incertaines

L'application du théorème du petit gain en conjonction avec le théorème d'assignation de gain nous a permis de synthétiser des contrôleurs donnant des bornitudes ou des stabilités robustes à certains types de perturbations dynamiques. Nous allons traiter maintenant le cas où nous avons en plus des incertitudes paramétriques.

### 2.4.1 Description de systèmes

Considérons un système nonlinéaire décrit par les équations différentielles suivantes :

$$\dot{x} = a(x, u) + A(x, u)p^* + \omega(x, p^*, z) \quad (2.80)$$

$$\dot{z} = h(x, p^*, z) \quad (2.81)$$

où  $u \in \mathbb{R}^m$  est l'entrée,  $x \in \mathbb{R}^n$  est une composante mesurable de l'état,  $z \in \mathbb{R}^r$  est une composante inconnue. Aussi,  $p^* \in \mathbb{R}^l$  est un paramètre inconnu qui est *a priori* dans un ensemble compact, convexe et connu noté  $\Pi \subset \mathbb{R}^l$ . On suppose que les fonctions  $a$ ,  $A$ ,  $\omega$  et  $h$  sont suffisamment régulières.

Notre problème est : *trouver un contrôleur dynamique  $u := u(x, \hat{p})$ ,  $\hat{p} = \chi(x, \hat{p})$  tel que toutes les solutions du système (2.80)-(2.81) en boucle fermée sont bornées.*

Pour cela, nous avons besoin des hypothèses suivantes :

(S1) Il existe une fonction  $C^1$  positive  $V(x, p)$ , une fonction  $C^0$  positive  $W(x, p)$ , trois fonctions  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  de classe  $K_\infty$  (indépendantes de  $p$ ), et une fonction  $C^1$   $u_n(x, p)$  telles que pour tous les  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$  et tous les  $p$  dans  $\Pi$ , nous avons :

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x, p) \leq \alpha_2(|x|) \quad \text{et} \quad \alpha_3(|x|) \leq W(x, p), \quad (2.82)$$

et :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, p) [a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p))p] \leq -W(x, p) \leq 0. \quad (2.83)$$

Cette hypothèse signifie que pour chaque modèle de synthèse, i.e. pour chaque  $p \in \Pi$  :

$$\dot{x} = a(x, u) + A(x, u)p, \quad (2.84)$$

$u_n(x, p)$  est une commande stabilisante (voir Pomet [57] ou S (3.12)).

(S2) Il existe une constante  $\mu_1$  dans  $(0, 1)$ , et une fonction  $\alpha$  de classe  $K_\infty$  telles que :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \omega(x, p', z) \right| \leq \mu_1 W(x, p) + \alpha(|z|) \quad \forall p, p' \in \Pi. \quad (2.85)$$

(S3) Le système  $\dot{z} = h(x, p, z)$  est BIBS uniformément en  $p \in \Pi$  avec  $x$  considérée comme entrée, en ce sens qu'il existe une fonction  $\gamma_z$  de classe  $K_\infty$  telle qu'à chaque condition initiale  $z_0$ , et chaque entrée  $x(t)$  dans  $L^\infty([0, T]; \mathbb{R}^n)$ , est associée une solution  $z(t)$  définie sur  $[0, T]$ . De plus,  $z(t)$  satisfait :

$$|z(t)| \leq d_z + \gamma_z \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{|x(\tau)|\} \right) \quad \forall 0 \leq t < T \quad (2.86)$$

où  $d_z$  est un nombre réel positif indépendant de  $x(t)$ .

**Remarque 2.7** Notons que la commande nominale  $u_n(x, p)$  dans (S1) est supposée régulière en  $p$ . Cette hypothèse implique que les problèmes de singularité des lois de commande lorsque  $p$  varie ne sont pas abordés.  $\square$

**Remarque 2.8** L'hypothèse (S2) n'est pas très restrictive. En effet, puisque  $\Pi$  est compact, il existe toujours deux fonctions  $\alpha_x(s, p)$ ,  $\alpha_z(s, p)$ , positives et continues pour tout  $(s, p)$  dans  $\mathbb{R}_+ \times$

$\Pi$ , telles que pour chaque  $p$  fixé, les fonctions résultantes  $\alpha_x(\cdot, p)$ ,  $\alpha_z(\cdot, p)$  sont non décroissantes et que :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \omega(x, p', z) \right| \leq \alpha_x(|x|, p) + \alpha_z(|z|, p) \quad \forall p, p' \in \Pi.$$

Par exemple, pour chaque  $p$  dans  $\Pi$ , on peut prendre

$$\begin{aligned} \alpha_x(s, p) &:= \sup_{p' \in \Pi} \sup_{\theta(|z|) \leq |x| \leq s} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \omega(x, p', z) \right|, \\ \alpha_z(s, p) &:= \sup_{p' \in \Pi} \sup_{\theta^{-1}(|x|) \leq |z| \leq s} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) \omega(x, p', z) \right| \end{aligned}$$

où  $\theta$  est une fonction de classe  $K_\infty$ . Aussi on peut toujours prendre une fonction  $\alpha$  de classe  $K$  satisfaisant :

$$\alpha(s) \geq \sup_{p \in \Pi} \alpha_z(s, p).$$

Si bien que l'hypothèse (S2) ou (2.85) porte surtout sur :

$$\alpha_x(|x|, p) \leq \mu_1 W(x, p) \quad \forall x, p.$$

Notons qu'avec la même hypothèse on peut garantir la bornitude globale des solutions du système suivant :

$$\dot{x} = a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p))p + \omega(x, p', z)$$

en regardant  $p$  comme un paramètre constant et  $z$  et  $p'$  deux fonctions bornées du temps.  $\square$

**Notes bibliographiques.** Le problème relatif à la stabilité de familles paramétrées de systèmes a été aussi étudié dans la thèse [45] de Lin. Suivant la terminologie de Lin [45, p.103], (S1) est équivalente à dire que la fonction  $V(x, p)$  est une *fonction de Lyapunov régulière pour la famille de systèmes* suivante :

$$\dot{x} = a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p))p.$$

Une condition suffisante et nécessaire pour l'existence d'une telle fonction  $V(x, p)$  a été donnée dans Lin [45, Theorem 12]. Aussi, si nous empruntons la terminologie de [45, Def.5.2.6], sous (S1) et (S2),  $V(x, p)$  est une *fonction ISS de Lyapunov* pour le système avec  $z$  comme entrée :

$$\dot{x} = a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p))p + \omega(x, p', z)$$

et pour  $p \in \Pi$  uniformément en  $p' \in \Pi$ .

Si  $u_n(x, p)$  dans (S1) est *indépendant* de  $p$ , selon [45, p.106], le système (2.84) est dit *régulièrement stabilisable de façon robuste par rapport à tout  $p \in \Pi$* .

### 2.4.2 Solutions bornées: résultat global

Avant d'énoncer notre résultat, rappelons une technique de projection très utile dans la commande adaptative. Avec des restrictions faibles sur l'ensemble  $\Pi$  (voir Praly et al. [64, Assumption ICS (94)]), on peut définir une application Proj de  $\Pi \times \mathbb{R}^l$  dans  $\mathbb{R}^l$  qui est localement lipschitzienne (voir [64, eq. (104)] pour une définition précise). D'après [64, Lemma (105)], une propriété importante de la fonction Proj est que la solution  $\hat{p}$  de l'équation :

$$\dot{\hat{p}}(t) = \text{Proj}(\hat{p}(t), y(t))$$

reste toujours dans le compact  $\Pi$  pour  $y(\cdot) \in C^1$  et  $\hat{p}(0)$  adéquate.

Sous les hypothèses (S1)–(S3), nous essayons de résoudre notre problème. Observons que, d’une part, puisque  $p^*$  est inconnu, le contrôleur stabilisant nominal  $u_n(x, p^*)$  dans (S1) ne peut pas s’appliquer au système (2.80)–(2.81); d’autre part, puisque  $z$  n’est pas mesurée, on ne voit pas comment appliquer directement une synthèse de Lyapunov à (2.80)–(2.81). L’idée ici est d’utiliser le théorème du petit-gain 1.10. Plus précisément, pour le modèle de synthèse à paramètre inconnu (2.84), nous allons trouver une loi d’adaptation  $\dot{\hat{p}} = \chi(x, \hat{p})$  qui donne une estimée  $\hat{p}$  de  $p^*$  telle qu’avec  $u_n(x, \hat{p})$ , les solutions du système étendu composé de (2.84) et  $\dot{\hat{p}} = \chi(x, \hat{p})$  sont bornées; de plus la composante  $x(t)$  tend vers zéro. En outre, ce même contrôleur adaptatif rend le système (2.80) BIBO et admet un certain gain nonlinéaire  $\gamma_x$ . Si la composition de  $\gamma_x$  avec le gain nonlinéaire  $\gamma_z$  du second système (2.81) est strictement inférieure à la fonction identité, alors selon le théorème du petit-gain 1.10 ou [47, Theorem 2], toutes les solutions  $(x(t), z(t))$  de (2.80)–(2.81) sont bornées sur  $[0, +\infty)$ .

Considérons pour le premier système (2.80) la fonction de Lyapunov augmentée d’un terme d’erreur d’estimation du paramètre :

$$U(x, \hat{p}) = L(V(x, \hat{p})) + \frac{1}{2}|\hat{p} - p^*|^2 \quad (2.87)$$

où  $L$  est une fonction  $C^1$  de classe  $K_\infty$ . La dérivée temporelle de  $U$ , le long des solutions de (2.80) avec n’importe quel signal  $z(\cdot)$  continu et borné sur  $[0, +\infty)$ , est :

$$\begin{aligned} \dot{U}|_{(2.80)} &= L'(V) \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})(a(x, u_n(x, \hat{p})) + A(x, u_n(x, \hat{p}))\hat{p}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})\omega(x, p^*, z) + \frac{\partial V}{\partial p}(x, \hat{p})\dot{\hat{p}} \right] \\ &\quad + L'(V) \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})A(x, u_n(x, \hat{p}))(p^* - \hat{p}) + \dot{\hat{p}}^\top (\hat{p} - p^*) . \end{aligned} \quad (2.88)$$

Notons que cette égalité est vraie en tout instant  $t \geq 0$  où  $x(t)$  est définie. Le deuxième terme dans les crochets n’est pas gênant, puisque d’après les hypothèses (S2) et (S1) il est dominé par le premier terme dans les crochets. La somme des deux derniers termes est négative à condition que l’on choisisse la loi d’adaptation :

$$\dot{\hat{p}} = \text{Proj} \left( \hat{p}, L'(V(x, \hat{p}))A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})^\top \right) . \quad (2.89)$$

Dans ce cas, il n’y a que le troisième terme  $\frac{\partial V}{\partial p}(x, \hat{p})\dot{\hat{p}}$  qui crée une difficulté. Une façon possible de réduire l’effet de cet erreur est de “minimiser” à priori le terme  $\frac{\partial V}{\partial p}(x, \hat{p})\dot{\hat{p}}$  une fois que  $\dot{\hat{p}}$  est choisie par (2.89). Ceci revient à choisir une fonction  $L$  propre dont la dérivée  $L'(V)$  est assez petite lorsque  $V$  est grand.

Dans la suite, nous allons considérer d’abord le cas où  $V(x, p)$  est indépendante de  $p$ , puis le cas où  $V(x, p)$  est dépendante de  $p$ .

### Cas 1 : $V(x, p)$ est indépendante de $p$

Dans ce cas,  $\frac{\partial V}{\partial p}(x, \hat{p})\dot{\hat{p}} \equiv 0$ . Nous pouvons prendre  $L = \frac{1}{\lambda}\text{Id}$ , avec  $\lambda$  un nombre réel strictement positif, et nous avons :

**Proposition 2.6** *Sous les hypothèses (S1), (S2) et (S3), si de plus  $V(x, p) \equiv V(x) \forall p \in \Pi$ , et il existe une constante  $\mu_2$  dans  $(0, 1)$ , et deux fonctions  $\rho_1, \rho_2$  de classe  $K_\infty$  telles que :*

$$\left( \alpha_1^{-1} \circ \frac{1}{\mu_2} \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1} \alpha \right) \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_z(s) \leq (\text{Id} - \rho_2)(s) \quad \forall s \geq 0, \quad (2.90)$$

alors toutes les solutions du système composé de (2.80), (2.81) et (2.89) avec  $L = \frac{1}{\lambda} \text{Id}$ , bouclé avec  $u_n(x, \hat{p})$ , sont bien définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées.

*Preuve :* En premier lieu, nous démontrons que, pour le système (2.80)-(2.89), il existe une fonction  $\gamma_x$  de classe  $K_\infty$  et une constante  $d_x \geq 0$  (peut-être dépendante de  $x(0)$ ) telles que pour toute fonction  $z(t)$  dans  $L^\infty([0, +\infty); \mathbb{R}^r)$ , (2.80)-(2.89) a une solution unique  $x(t)$  définie sur  $[0, +\infty)$  et vérifiant :

$$|x(t)| \leq d_x + \gamma_x(\|z\|) \quad \forall t \in [0, +\infty) \quad (2.91)$$

En effet, le second membre étant localement lipschitzien pour toute telle fonction  $z(t)$ , il existe une unique solution  $x(t)$  définie maximale sur  $[0, T)$ . Alors avec  $\hat{p}$  donnée par (2.89), vu (S1) et (S2), l'équation (2.88) implique :

$$\dot{U}|_{(2.80)} \leq -\frac{1}{\lambda} [(1 - \mu_1) \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V) + \alpha(\|z\|)] . \quad (2.92)$$

Introduisons le nombre réel positif  $V^*$  :

$$V^* = \max \left\{ V(x(0)), \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1} \alpha(\|z\|) \right\} . \quad (2.93)$$

Sans nuire à la généralité, supposons que  $V^*$  est strictement positif.

Considérons l'ensemble :

$$\Theta = \{t \in [0, T) \mid V(x(t)) > V^*\} .$$

Si cet ensemble est vide, alors par contradiction  $T = +\infty$  et (2.91) est satisfaite. Précisément, en utilisant l'inégalité faible de triangularité (B.3) avec  $\rho = \frac{1}{\mu_2} \text{Id}$ , nous avons :

$$d_x = \alpha_1^{-1} \left( \frac{V(x(0))}{1 - \mu_2} \right), \quad \gamma_x(s) = \alpha_1^{-1} \circ \frac{\alpha_2}{\mu_2} \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1} \alpha(s).$$

Si cet ensemble  $\Theta$  n'est pas vide, il a une borne inférieure notée  $t_0$  et par continuité :

$$V(x(t_0)) = V^* .$$

De plus, il existe un instant  $t_1 > t_0$  tel que :

$$V(x(t)) > V^* \quad \forall t \in (t_0, t_1) .$$

Alors, nous avons :

$$\dot{U}(t) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1)$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{\lambda} V(x(t)) + \frac{1}{2} |\hat{p}(t) - p^*|^2 \leq \frac{1}{\lambda} V(x(t_0)) + \frac{1}{2} |\hat{p}(t_0) - p^*|^2 \quad \forall t \in [t_0, t_1) . \quad (2.94)$$

En dénotant :

$$\text{diam}(\Pi) := \sup_{(p_1, p_2) \in \Pi^2} \{|p_1 - p_2|\} < +\infty ,$$

(2.94) implique :

$$V(x(t)) \leq V^* + \frac{\lambda}{2} \text{diam}(\Pi)^2 \quad \forall t \in [t_0, t_1] . \quad (2.95)$$

En répétant cet argument sur tout intervalle semi-ouvert du type  $[t_0, t_1]$ , nous concluons que (2.95) est vérifiée pour tout  $t \in [0, T)$ , i.e. :

$$V(x(t)) \leq V^* + \frac{\lambda}{2} \text{diam}(\Pi)^2 \quad \forall t \in [0, T) . \quad (2.96)$$

Finalement, avec la définition de  $V^*$  dans (2.93), nous obtenons pour tout  $t$  de  $[0, T)$  :

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) + \frac{\lambda}{2} \text{diam}(\Pi)^2 + \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \left( \frac{1}{1 - \mu_1} \alpha(\|z\|) \right) . \quad (2.97)$$

La fonction  $V$  étant propre, ceci implique par contradiction que  $T = +\infty$ . De plus, avec (2.82), en appliquant l'inégalité faible de triangularité (B.3) avec  $\gamma = \alpha_1^{-1}$  et  $\rho = \frac{1}{\mu_2} \text{Id}$  à (2.97), nous obtenons l'équation (2.91) avec  $(d_x, \gamma_x)$  définies par :

$$d_x = \alpha_1^{-1} \left( \frac{1}{1 - \mu_2} \left( \frac{\lambda}{2} \text{diam}(\Pi)^2 + V(x(0)) \right) \right) \quad (2.98)$$

$$\gamma_x(s) = \alpha_1^{-1} \circ \frac{1}{\mu_2} \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1} \alpha(s) , \quad s \geq 0 . \quad (2.99)$$

Revenons maintenant au système bouclé (2.80), (2.81), (2.89). Pour chaque condition initiale  $(x(0), z(0))$  et  $\hat{p}(0)$  à l'intérieur de  $\Pi$ , il existe une et une seule solution  $(x(t), z(t), \hat{p}(t))$  définie sur l'intervalle maximal à droite  $[0, T)$ . Par causalité, (S3) et (2.91)-(2.99) impliquent :

$$|x(t)| \leq d_x + \gamma_x \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{|z(\tau)|\} \right) \quad \forall t \in [0, T) , \quad (2.100)$$

$$|z(t)| \leq d_z + \gamma_z \left( \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{|x(\tau)|\} \right) \quad \forall t \in [0, T) . \quad (2.101)$$

Sous la condition (2.90), d'après le théorème du petit gain [47, Theorem 2] ou le Théorème 1.10 et la compacité de  $\Pi$ ,  $x(t)$ ,  $z(t)$  et  $\hat{p}(t)$  sont bornées sur  $[0, T)$ . On en déduit par contradiction que  $T = +\infty$ .  $\square$

**Remarque 2.9** Il est démontré dans Lin [45, Lemma 5.2.7] que si le système  $\dot{x} = f(x, u, p)$  admet une *fonction ISS de Lyapunov* pour  $p \in \Pi$ , alors ce système est *ISS de façon robuste* pour tout  $p \in \Pi$ . La différence avec Lin [45] est que dans notre cas adaptatif la fonction  $U$ , définie dans (2.87), n'est pas la fonction pour avoir une fonction ISS de Lyapunov pour le système (2.80)-(2.89) avec  $u = u_n(x, \hat{p})$  et  $z$  comme entrée, i.e. :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x, u_n(x, \hat{p})) + A(x, u_n(x, \hat{p}))p^* + \omega(x, p^*, z) , \\ \dot{\hat{p}} &= \text{Proj} \left( \hat{p}, L'(V(x, \hat{p}))A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})^\top \right) , \end{aligned}$$

ou encore que  $\hat{p}$  est non constant. La conséquence est que la borne asymptotique de  $d_x$ , défini dans (2.98), est *dépendante* de la condition initiale  $x(0)$ . Donc  $d_x$  dans (2.100) ne peut pas être la somme d'une fonction de classe  $KL$  et une constante positive (indépendante de  $x(0)$ ).  $\square$



**Cas 2 :  $V(x, p)$  est dépendante de  $p$** 

Lorsque  $V(x, p)$  dépend de  $p$ , il est intéressant de prendre une fonction  $L$  propre dont la dérivée est la plus petite possible. Ceci nous suggère de choisir  $L$  comme :

$$L(V) = \frac{1}{\lambda} \log \left( 1 + \int_0^V \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds \right) \quad \forall V \geq 0 \quad (2.102)$$

où  $\lambda > 0$  et la fonction  $\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}$  est donnée par (S1) telle que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, p) [a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p))p] \leq -\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x, p)) \quad \forall x, p.$$

Nous avons donc :

$$L'(V) = \frac{\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V)}{\lambda(1 + \int_0^V \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds)}, \quad (2.103)$$

et, vu (2.89),

$$\hat{p} = \text{Proj} \left( \hat{p}, \frac{\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x, \hat{p}))}{\lambda(1 + \int_0^{V(x, \hat{p})} \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds)} A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})^\top \right). \quad (2.104)$$

**Remarque 2.10** Cette loi d'adaptation ne fait intervenir que des données sur le modèle. En effet,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$  ne dépendent que de  $a$ ,  $A$ ,  $u_n$  et  $V$ .  $\square$

Notre résultat principal est :

**Proposition 2.7** *Supposons que les hypothèses (S1), (S2) et (S3) sont satisfaites et qu'il existe une constante connue  $k > 0$  telle que, pour tous les  $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \Pi$ ,*

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \right| \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) A(x, u_n(x, p)) \right| \leq k \left( 1 + \int_0^{V(x, p)} \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds \right). \quad (2.105)$$

Dans ce cas nous choisissons le paramètre d'adaptation  $\lambda > k$ . Dans ces conditions, si :

$$\mu_1 \leq \frac{\lambda - k}{\lambda}, \quad (2.106)$$

et il existe une constante  $\mu_2$  dans  $(0, 1)$ , et deux fonctions  $\rho_1, \rho_2$  de classe  $K_\infty$  telles que, pour tout  $s \geq 0$ ,

$$\left( \alpha_1^{-1} \circ \frac{\exp(\delta_0)}{\mu_2} \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1 - k/\lambda} \alpha \right) \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_z(s) \leq (\text{Id} - \rho_2)(s) \quad (2.107)$$

où  $\delta_0$  est défini par :

$$\delta_0 = \frac{\lambda}{2} \text{diam}(\Pi), \quad (2.108)$$

alors toutes les solutions du système composé de (2.80), (2.81) et (2.104) bouclé avec  $u_n(x, \hat{p})$  sont bien définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées.

**Remarque 2.11** La condition (2.105), appelée *condition de croissance*, généralise celle de Pomet et Praly [59] :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \right| \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) A(x, u_n(x, p)) \right| \leq k(1 + V(x, p)^2) .$$

□

**Remarque 2.12** Lorsque  $p^*$  est connu, l'application du théorème du petit gain 1.10 dans les mêmes conditions donne la contrainte suivante :

$$\left( \alpha_1^{-1} \circ \frac{1}{\mu_2} \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1} \alpha \right) \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_z(s) \leq (\text{Id} - \rho_2)(s) . \quad (2.109)$$

En comparant (2.109) et (2.107), on voit que le contrôleur adaptatif assure la robustesse par rapport aux incertitudes paramétriques mais sa robustesse aux incertitudes dynamiques semble moins grande. L'augmentation de cette robustesse peut se faire en se rapprochant du cas  $p^*$  connu soit adaptation lente avec  $\lambda$  grand, réduction de l'incertitude paramétrique avec  $\text{diam}\Pi$  petit. On voit ainsi apparaître le compromis “adaptation rapide / robustesse”. □

*Preuve de Proposition 2.7 :*

Grâce aux hypothèses (S1)-(S2) et à [64, Lemma (105)], et vus (2.88), (2.103) et (2.104), la dérivée temporelle de  $U$  définie par (2.87), (2.102) satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{U}|_{(2.80)} \leq & \frac{\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V)}{\lambda(1 + \int_0^V \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds)} \left[ - (1 - \mu_1) \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x, \hat{p})) + \alpha(|z|) \right. \\ & \left. + \left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, \hat{p}) \right| \cdot \frac{\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x, \hat{p}))}{\lambda(1 + \int_0^{V(x, \hat{p})} \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds)} \left| A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})^\top \right| \right] . \end{aligned} \quad (2.110)$$

Avec (2.105), (2.110) implique :

$$\dot{U} \leq \frac{\alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V)}{\lambda(1 + \int_0^V \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(s) ds)} \left[ - (1 - \mu_1 - k/\lambda) \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1}(V(x, \hat{p})) + \alpha(|z|) \right] . \quad (2.111)$$

A partir de cette inégalité la preuve est complétée en suivant les mêmes arguments que pour la Proposition 2.6 à partir de (2.92). Ainsi, en définissant :

$$V_\star = \max \left\{ V(x(0), \hat{p}(0)) , \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \frac{1}{1 - \mu_1 - k/\lambda} \alpha(\|z\|) \right\} , \quad (2.112)$$

nous obtenons à la place de (2.97) :

$$L(V(x(t), \hat{p}(t))) \leq L(V_\star) + \frac{\lambda}{2} \text{diam}(\Pi)^2 \quad \forall t \in [0, T] . \quad (2.113)$$

En appliquant le Lemme C.4 à (2.113) avec :

$$\gamma = \alpha_3 \circ \alpha_2^{-1} \quad \text{et} \quad \delta = \delta_0 := \lambda \text{diam}(\Pi)^2 / 2 , \quad (2.114)$$

nous obtenons un nombre réel  $\delta_1 \geq 0$  qui ne dépend que de  $\delta$  dans (2.114) tel que :

$$V(x(t), \hat{p}(t)) \leq e^{\delta_0} V_\star + \delta_1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.115)$$

Ceci implique que  $T = +\infty$  et, avec la définition de  $V_\star$  dans (2.112),

$$V(x(t), \hat{p}(t)) \leq e^\delta V(x(0), \hat{p}(0)) + \delta_1 + e^{\delta_0} \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \left( \frac{1}{1 - \mu_1 - k/\lambda} \alpha(\|z\|) \right) \quad (2.116)$$

valable pour tous les  $t \geq 0$ . Nous concluons avec les mêmes arguments après (2.97) dans la preuve de la Proposition 2.6.  $\square$

**Commentaires.** Nous venons d'obtenir un résultat de bornitude robuste aux incertitudes dynamiques et paramétriques. Malheureusement, le problème de convergence asymptotique est encore ouvert. La difficulté vient de l'adaptatif. Plus précisément, supposons que, pour chaque  $p^\star$ , le sous système  $z$  de (2.80) est ISS avec  $x$  comme entrée. Pour pouvoir utiliser le théorème du petit gain au système (2.80)-(2.81), nous devons démontrer que le sous système  $x$  de (2.80) est ISS avec  $z$  comme entrée (pour chaque  $p^\star$ ). Mais, dans notre cas adaptatif, nous ne voyons pas comment obtenir cette propriété ISS à partir de (2.92) et (2.87) avec  $L = \frac{1}{\lambda} \text{Id}$ , ou de (2.111), (2.87) et (2.102).

Le problème de convergence asymptotique va être traité dans le chapitre suivant en utilisant une forme spécifique de la caractérisation GUEC (1.63) et en introduisant une technique de normalisation dynamique dans le cas nonlinéaire.

## 2.5 Résumé

Nous avons donné deux applications du théorème du petit-gain 1.9 ou 1.10 au problème de la synthèse de commande donnant une bornitude et si possible une convergence robuste pour des systèmes nonlinéaires incertains. La première est relative à la stabilisation globale par retour d'état partiel ou par retour de sortie pour deux classes de systèmes nonlinéaires qui ont une forme globale spéciale. Cette application a motivé l'introduction d'outils de synthèse de commande robuste dont l'usage n'est pas limité aux systèmes triangulaires traités dans ce chapitre.

La seconde application concerne la stabilisation robuste de systèmes nonlinéaires avec des incertitudes dynamiques et paramétriques. Notre conclusion est que si les incertitudes dynamiques interviennent d'une façon spécifique et satisfont une condition du petit gain, alors il existe un contrôleur adaptatif qui rend toutes les solutions du système bouclé bornées. A travers ces deux applications, on voit que l'intérêt du théorème du petit gain généralisé 1.9 ou 1.10 est de permettre d'établir des outils importants pour la synthèse de commande, et de procurer un point de vue intéressant pour la compréhension du mécanisme de stabilité de systèmes interconnectés.



## Chapitre 3

# Application de la Caractérisation des Effets Non Modélisés GUEC

### 3.0 Généralités

La stabilisation globale d'un système interconnecté soumis à des incertitudes paramétriques et dynamiques a été étudiée dans la Section 2.4. Les résultats ont été obtenus grâce au théorème du petit gain 1.10 ou [47, Theorem 2]. Dans ce chapitre, nous continuons à étudier ce problème mais dans un contexte un peu plus général avec un système n'ayant pas forcément une structure d'interconnexion. Aussi, au lieu d'utiliser la caractérisation SpES et le théorème du petit gain, nous allons utiliser la caractérisation GUEC (1.63) et des théorèmes de stabilité de Lyapunov.

Notre problème se formule de la façon suivante :

Etant donnée une famille de modèles  $(\Sigma_p)_{p \in \Pi}$ , indexée par  $p$ , un paramètre dans un convexe compact connu  $\Pi$  de  $\mathbb{R}^l$  :

$$\Sigma_p : \quad \dot{x} = a(x, u) + A(x, u)p \quad (3.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in \mathbb{R}^m$  dénotent respectivement l'état et l'entrée,  $a$  et  $A$  sont des champs de vecteurs connus réguliers. Supposons que, pour chaque  $p$  fixé, il existe un contrôleur  $u_n(\cdot, p)$  régulier, dépendant régulièrement du paramètre  $p$ , qui stabilise le système (3.1) avec une fonction de Lyapunov régulière  $V$  de  $\mathbb{R}^n \times \Pi$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

A toute fonction du temps  $p^*(t)$  et tous signaux  $(x(t), u(t))$  donnés par un système réel nous pouvons associer une erreur de modélisation :

$$\omega(t) = \dot{x}(t) - a(x, u(t)) - A(x, u(t))p^* . \quad (3.2)$$

Nous cherchons des conditions suffisantes sur  $\omega(t)$  et  $p^*(t)$  permettant de garantir la bornitude des solutions du système réel en utilisant une commande  $u(x, \hat{p})$  avec  $\hat{p}$  à définir. Nous nous intéresserons aussi au cas de la convergence vers 0 des solutions.

Pour ce qui concerne la bornitude des solutions une première réponse a été obtenue dans la Section 2.4 pour le cas où le système réel a la structure interconnectée définie par (2.80), (2.81). Par contre, même dans ce cas, la question de convergence n'a pas pu être résolue lorsque  $p^*$  est inconnu. Ici nous nous replaçons dans le contexte plus général de la Section 1.2.2. Précisément nous supposons que, lorsque la commande est  $u_n(x, \hat{p})$  où  $\hat{p}$  est une fonction  $C^1$  du temps, la "distance" entre modèle et système réel est caractérisée par (voir (1.64)) :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \hat{p})) - A(x, u_n(x, \hat{p}))p^*] \right| \leq \mu_1 W(x(t), \hat{p}(t)) + \mu_2 r(t) + D \quad (3.3)$$

où  $p^*$  est un paramètre constant inconnu, et le signal de comparaison  $r$  est défini par :

$$r(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\Upsilon(V(x(\tau), \widehat{p}(\tau)))\} \quad (3.4)$$

avec  $W$  et  $\Upsilon$  deux fonctions liées à la stabilité du modèle (voir (3.13), (3.15)). Pour le cas où  $p^*$  est inconnu, cas dit adaptatif, une méthode classique de synthèse de loi de commande est la synthèse de Lyapunov. Malheureusement, dans le cas de l'hypothèse (3.3) nous ne connaissons pas de preuve de bornitude par la méthode de Lyapunov (voir la preuve de la Proposition 1.2). Pour permettre une telle technique de preuve dans l'intention d'obtenir la propriété de convergence des solutions, nous restreignons la définition de  $r$  en remplaçant l'opérateur sup par l'opérateur donné par un système du premier ordre. On finit par avoir une fonction de Lyapunov *globale* (voir (3.76), (3.80), (3.90)), à la place de la fonction de Lyapunov partielle  $V(x, p)$  du modèle. Plus précisément, ayant choisi deux nombres réels  $\alpha > 0$ ,  $r_0 > 0$ , une fonction  $\Psi$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ , convexe, de classe  $C^1$ , nous supposons l'existence de  $\mu_1, \mu_2$  tels que pour toute solution il existe  $D$  satisfaisant :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, \widehat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \widehat{p})) - A(x, u_n(x, \widehat{p})) p^*] \right| \leq \mu_1 W(x, \widehat{p}) + \mu_2 \Psi^{-1}(\alpha r) + D \quad (3.5)$$

où  $r$  est maintenant défini par :

$$\dot{r} := -\alpha r + \Psi(\Upsilon(V(x, \widehat{p}))) , \quad r(0) = r_0 \quad (3.6)$$

et  $p^*$  est une fonction  $C^1$  du temps dont la dérivée est bornée. Le signal de comparaison  $r$  est ainsi défini par une équation différentielle (3.6). Il est clair que (3.5)-(3.6) implique (3.3)-(3.4) (voir la Remarque 3.1).

## 3.1 Effets non-modélisés

### 3.1.1 Hypothèses

Considérons un système commandé qui admet une représentation d'état dans  $\mathbb{R}^N$  et dont la dynamique peut être augmentées de filtres sur l'entrée et la sortie, sont décrites globalement par :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= F(X, t, u), \quad X \in \Omega \\ x &= H(X, t), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (3.7)$$

où le vecteur  $X$  est l'état dans  $\mathbb{R}^N$  qui n'est pas complètement mesuré et dont la dimension  $N$  est inconnue,  $u$  est l'entrée dans  $\mathbb{R}^m$ ,  $x$  est une sortie mesurée dans  $\mathbb{R}^n$  et,  $\Omega$  est un voisinage ouvert de l'origine de  $\mathbb{R}^N$ . Supposons que  $F$  et  $H$  sont définies respectivement sur  $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m$  et  $\Omega \times \mathbb{R}_+$ , et telles que :

$$H(\Omega, 0) = \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

et que :

**Hypothèse R (Régularité)** (3.9)  
 *$F$  et  $H$  sont de classe  $C^1$  telles que pour chaque  $(X, u)$ ,  $\frac{\partial H}{\partial X}(X, \cdot)$ ,  $\frac{\partial H}{\partial t}(X, \cdot)$  et  $F(X, \cdot, u)$  sont bornées.*

La condition  $H(\Omega, 0) = \mathbb{R}^n$  signifie que l'on cherche des résultats globaux dans l'espace de la sortie  $x$ .

Supposons aussi :

**Hypothèse OE (Observabilité de l'Evasion) (3.10)**

Pour tout  $T > 0$  fini ou infini et toute solution  $X(t)$  de (3.7) maximale définie sur  $[0, T)$ , nous avons :

$$(X(t) \rightarrow \partial\Omega \text{ si } t \rightarrow T) \Rightarrow \limsup_{t \rightarrow T} (|H(X(t), t)| + |u(t)|) = +\infty .$$

C'est-à-dire, aucune solution du système (3.7) ne peut atteindre la frontière du domaine "global"  $\Omega$  sans que l'entrée  $u$  ou la sortie  $x$  n'explose en même temps.

Notre problème est : trouver un contrôleur tel que les solutions  $X(t)$  de (3.7) soient bornées et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(X(t), t) = \mathcal{E}$ , une consigne désirée pour la mesure  $x$ .

Le système de simulation (3.7) n'étant que partiellement connu, nous allons travailler avec un modèle de synthèse dont l'état est  $x$ . C'est pourquoi il peut être intéressant d'augmenter la dynamique du système à commander par des filtres (voir [64, Exemple (24)]). La dynamique de ce modèle est choisie parmi une famille de modèles indexée par un paramètre (vectoriel)  $p$  :

$$\dot{x} = a(x, u) + A(x, u) p \quad (3.11)$$

où les fonctions  $a$  et  $A$  sont connues et de classe  $C^1$ , et  $p$  est un paramètre dans un sous ensemble convexe, compact et connu  $\Pi \subset \mathbb{R}^l$ .

Notre modèle de synthèse est supposé être stabilisable pour tous les  $p$  :

**Hypothèse S (Stabilisabilité) (3.12)**

Il existe trois fonctions connues  $u_n$ ,  $W$  et  $V$  telles que :

- 1 -  $u_n : \mathbb{R}^n \times \Pi \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de classe  $C^1$ ,
- 2 -  $W$  est positive, continue,  $W(x, p) = 0$  ssi  $x = \mathcal{E}$ ,
- 3 -  $V$  est de classe  $C^2$ , positive,  $V(x, p) = 0$  ssi  $x = \mathcal{E}$  et, pour chaque nombre réel positif  $K_v$ , l'ensemble :  $\{x \mid V(x, p) \leq K_v, p \in \Pi\}$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ ,
- 4 - pour chaque  $(x, p)$  dans  $\mathbb{R}^n \times \Pi$ , nous avons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, p) [a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p)) p] \leq -W(x, p) . \quad (3.13)$$

Ceci implique en particulier que, pour chaque  $p$  dans  $\Pi$ , le point  $\mathcal{E}$ , qui peut dépendre de  $p$ , est un équilibre GAS du système :

$$\dot{x} = a(x, u_n(x, p)) + A(x, u_n(x, p)) p \quad (3.14)$$

et que  $V$  est une fonction de Lyapunov correspondante pour ce modèle en boucle fermée dont la dérivée est plus petite que  $-W$ .

Le fait que la fonction  $u_n(x, p)$  est régulière en  $p$  nous permet de sauter les problèmes de singularités des lois de commande lorsque  $p$  varie dans un ouvert.

Sachant que le modèle peut être stabilisé pour n'importe quel paramètre dans  $\Pi$ , nous avons maintenant besoin de caractériser la distance entre le modèle (3.11) et le système de simulation (3.7). Pour ce faire, nous devons choisir deux nombres réels strictement positifs  $\alpha$ ,  $r_0$ , une fonction  $C^1$  strictement croissante et convexe  $\Psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , avec  $\Psi(0) = 0$ , et une fonction réelle positive  $\Upsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , de classe  $C^1$ , satisfaisant :

$$\begin{aligned} \Upsilon(V(x, p)) &\leq W(x, p) \quad , \quad \forall (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \Pi \\ \Upsilon(v) &= 0 \quad \text{ssi} \quad v = 0 \quad , \quad \liminf_{v \rightarrow +\infty} \Upsilon(v) > 0 . \end{aligned} \quad (3.15)$$

Alors, nous supposons :

**Hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (Caractérisation des Effets Non-modélisés) (3.16)**

Il existe une fonction réelle positive  $\mathcal{D}(\Omega)$  et trois nombres réels positifs  $\mu_1, \mu_2$  et  $\rho$  tels que, pour chaque fonction  $C^1 \hat{p} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Pi$  et chaque solution maximale  $X(t)$  de :

$$\dot{X} = F(X, t, u_n(x, \hat{p})) , \quad x = H(X, t) , \quad X(0) \in \Omega \quad (3.17)$$

définie sur  $[0, T)$ , il existe une fonction  $C^1 p^* : [0, T) \rightarrow \Pi$ , avec  $|\dot{p}^*| \leq \rho$ , et une fonction continue du temps  $D : [0, T) \rightarrow [0, \mathcal{D}(\Omega)]$  satisfaisant pour tout  $t \in [0, T)$  :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \hat{p})) - A(x, u_n(x, \hat{p})) p^*] \right| \leq \mu_1 W(x, \hat{p}) + \mu_2 \Psi^{-1}(\alpha r) + D(t) \quad (3.18)$$

où  $r$ , appelé le signal de comparaison, est défini par :

$$\dot{r} = -\alpha r + \Psi(\Upsilon(V(x, \hat{p}))) , \quad r(0) = r_0 . \quad (3.19)$$

Notons que  $p^*$  peut dépendre du temps et de  $\hat{p}$ , et que  $r$  est un signal défini maintenant par une équation différentielle.

Avant de démontrer que UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) implique GUEC (1.63) (voir plus loin la Remarque 3.1), nous faisons quelques commentaires sur l'actuelle caractérisation UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) .

La caractérisation (3.18)-(3.19) est en certain sens *en boucle fermée*. Au lieu de demander que l'inégalité (3.18) soit satisfaite pour toutes les entrées  $u$ , on a besoin seulement qu'elle soit vérifiée pour la classe particulière d'entrées  $u_n(\cdot, \hat{p})$ . Par contre, un aspect de *boucle ouverte* reste, puisque la fonction  $\hat{p}$  du temps n'étant pas à priori fixée, on demande que (3.18) soit satisfaite pour toutes les fonctions possibles  $\hat{p}$  du temps. D'autre part, la fonction de Lyapunov  $V$  du modèle bouclé est impliquée dans l'inégalité (3.18). Ainsi la loi de commande  $u_n$  devra être synthétisée de manière telle que la fonction correspondante  $V$  satisfasse (3.18), i.e. les effets non-modélisés devront être pris en compte dans la synthèse de commande. Cet aspect sera illustré dans le paragraphe 3.1.2 quand nous avons choisi  $v_1, v_2$  et  $j$ .

Le nombre réel positif  $\alpha$  dans (3.19) peut être considéré comme un pôle. Il devrait être choisi dépendant des constantes de temps négligées. Ceci implique certaines connaissances sur ces constantes du temps. Néanmoins, comme nous allons le voir dans l'exemple du paragraphe 3.1.2 (voir (3.68)), en introduisant la fonction  $\Psi$ , il est possible de rendre cette dépendance très faible. Aussi, dans le cas de systèmes linéaires, cette dépendance peut être surmontée par le filtrage d'entrée comme l'ont montré Ioannou et Tsakalis [25]. Une autre motivation pour l'introduction d'un intégrateur est d'éviter que l'entrée ait une action directe sur les dynamiques non-modélisées (voir [24, 25]). Dans le contexte de la commande adaptative [10, 32, 73], le problème venant d'une telle action directe a été résolu pour une analyse de stabilité *locale*. Par contre, il est encore ouvert pour une analyse *globale*. En effet, l'ajout d'intégrateurs peut être facilement fait dans le cas non-adaptatif (voir [76, Theorem 3.c] ou [13]). Mais, dans le contexte de la commande adaptative, l'ajout d'intégrateurs entraîne des difficultés, la dépendance paramétrique du système bouclé devant être renforcée (voir les discussions sur la condition de matching dans Praly *et al.* [64]). En particulier, pour le cas de bras de robot comme considéré par Reed et Ioannou [67] et Champion et Bastin [10], nous ne voyons pas comment ajouter des intégrateurs dans le cas adaptatif dû au fait que le modèle est implicitement linéairement paramétré.

Pour voir comment choisir la constante  $\alpha$  et la fonction  $\Psi$  qui sont impliquées dans l'hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) et vont être explicitement utilisées dans le contrôleur que nous allons



proposer dans la Section 3.2.3, nous proposons un lemme technique dont la preuve est une application directe des arguments de [22, Chapter 3] :

**Lemme 3.1** : Soit  $v(t)$  une fonction  $C^1$  définie sur  $[0, T)$ . Nous avons les propriétés suivantes :

1 – Si  $\Psi$  est une fonction convexe, avec  $\Psi(0) = 0$ , et strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ , alors  $\Psi(x)/x$  (resp.  $\Psi^{-1}(x)/x$ ) est non-décroissante (resp. non-croissante) en  $x > 0$  et, pour chaque  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  et  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(kx) &\leq k \Psi^{-1}(x) \\ \Psi^{-1}(x+y) &\leq \Psi^{-1}(x) + \Psi^{-1}(y) .\end{aligned}\tag{3.20}$$

2 – Soient  $r_1$  et  $r_2$  deux fonctions réelles positives telles que :

$$\dot{r}_1 \leq -\alpha_1 r_1 + \Psi_1(v) \quad , \quad \dot{r}_2 = -\alpha_2 r_2 + \Psi_2(v)\tag{3.21}$$

où  $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$  sont des nombres réels et  $\Psi_1, \Psi_2$  sont des fonctions strictement croissantes de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0$  et  $\Psi_2$  et  $\Psi_2 \Psi_1^{-1}$  sont convexes. Pour chaque  $t \in [0, T)$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\Psi_1^{-1}(\alpha_1 r_1(t)) &\leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Psi_2^{-1}(\alpha_2 r_2(t)) \\ &\quad + \Psi_2^{-1} \left( \max \{0, \Psi_2 \Psi_1^{-1}(\alpha_1 r_1(0)) e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 r_2(0) e^{-\alpha_2 t}\} \right) .\end{aligned}\tag{3.22}$$

3 – Soient  $r_3$  et  $r_4$  deux fonctions réelles positives telles que :

$$\dot{r}_3 \leq -\alpha r_3 + \beta \Psi(v) + \gamma \quad , \quad \dot{r}_4 = -\alpha r_4 + \Psi(v)\tag{3.23}$$

où  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 0$  et  $\gamma \geq 0$  sont des nombres réels et  $\Psi$  est une fonction convexe, avec  $\Psi(0) = 0$ , et strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour chaque  $t \in [0, T)$ , nous avons :

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}(\alpha r_3(t)) &\leq \max \{1, \beta\} \Psi^{-1}(\alpha r_4(t)) \\ &\quad + \Psi^{-1} \left( \max \{0, \gamma + (\alpha r_3(0) - \gamma - \alpha \beta r_4(0)) e^{-\alpha t}\} \right) .\end{aligned}\tag{3.24}$$

*Preuve* : Le point 1 est direct. En effet, quel que soit un couple de nombres réels  $(x, y)$  tel que  $0 < x < y < +\infty$ , nous avons :

$$x = \frac{y-x}{y} \times 0 + \frac{x}{y} \times y .\tag{3.25}$$

Comme  $\Psi$  est convexe,  $\Psi(0) = 0$  et  $\frac{y-x}{y} + \frac{x}{y} = 1$ , (3.25) implique :

$$\Psi(x) \leq \frac{x}{y} \Psi(y) .\tag{3.26}$$

Ceci démontre que  $\Psi(x)/x$  est non-décroissante en  $x > 0$ .

On se propose de démontrer que  $\Psi^{-1}$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_+$ . Pour ce faire, puisque  $\Psi$  est strictement croissante de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$  et  $\Psi(0) = 0$ , il suffit de montrer que  $\Psi(x)$  tend vers  $+\infty$  si  $x$  tend vers  $+\infty$ . Supposons que  $l := \limsup_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x) < +\infty$ . Comme  $\Psi(0) = 0$  et  $\Psi$  est convexe, nous avons :

$$\Psi(\lambda x) \leq \lambda \Psi(x) \quad \forall x \geq 0, \forall 0 < \lambda < 1 .\tag{3.27}$$

En faisant  $x$  dans (3.27) tendre vers  $+\infty$ , on obtient que  $l \leq \lambda l$  et ceci est impossible. Ensuite, la non-croissance de  $\Psi^{-1}(x)/x$  vient de la non-décroissance de  $\Psi(x)/x$  et du fait suivant :

$$\frac{\Psi^{-1}(x)}{x} = \frac{1}{\frac{\Psi(\Psi^{-1}(x))}{\Psi^{-1}(x)}} \quad \forall x > 0 .$$

Finalement, (3.20) est une conséquence directe de la non-croissance de  $\Psi^{-1}(x)/x$ . La première équation s'en résulte puisque :

$$\frac{\Psi^{-1}(kx)}{kx} \leq \frac{\Psi^{-1}(x)}{x} \quad \forall x > 0, \forall k > 1 .$$

La seconde équation s'en suit puisque :

$$\frac{x}{x+y} \Psi^{-1}(x+y) \leq \Psi^{-1}(x), \quad \frac{y}{x+y} \Psi^{-1}(x+y) \leq \Psi^{-1}(y) .$$

Pour le point 2, selon l'inégalité de Jensen avec  $\Psi_2 \Psi_1^{-1}$  convexe, nous avons :

$$\Psi_1^{-1}(\alpha_1 r_1) \leq \Psi_1^{-1} \left( \alpha_1 e^{-\alpha_1 t} r_1(0) + \alpha_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} \Psi_1(v(\tau)) d\tau \right) \quad (3.28)$$

$$\leq \Psi_2^{-1}(a) \quad (3.29)$$

où  $a$  est défini par :

$$a = e^{-\alpha_1 t} \Psi_2 \Psi_1^{-1}(\alpha_1 r_1(0)) + \alpha_1 \int_0^t e^{-\alpha_1(t-\tau)} \Psi_2(v(\tau)) d\tau . \quad (3.30)$$

Avec le point 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Psi_1^{-1}(\alpha_1 r_1) &\leq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Psi_2^{-1} \left( \alpha_2 e^{-\alpha_2 t} r_2(0) + \alpha_2 \int_0^t e^{-\alpha_2(t-\tau)} \Psi_2(v(\tau)) d\tau \right) \\ &\quad + \Psi_2^{-1} \left( \text{Max} \{0, \Psi_2 \Psi_1^{-1}(\alpha_1 r_1(0)) e^{-\alpha_1 t} - \alpha_1 r_2(0) e^{-\alpha_2 t}\} \right) . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ceci implique immédiatement le point 2.

Il reste à démontrer le point 3. D'après la définition de  $r_3$ , nous avons :

$$\Psi^{-1}(\alpha r_3) \leq \Psi^{-1} \left( \alpha e^{-\alpha t} r_3(0) + \alpha \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \Psi(v(s)) ds + \gamma(1 - e^{-\alpha t}) \right) \quad (3.32)$$

Avec le point 1, la conclusion se déduit comme dans la preuve du point 2.  $\square$

**Remarque 3.1** Grâce au Lemme 3.1, il est facile de démontrer que (3.18), (3.19) impliquent :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \hat{p})) - A(x, u_n(x, \hat{p})) p^*] \right| \\ \leq \mu_1 W(x, \hat{p}) + \mu_2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\Upsilon(V(\tau))\} + \overline{D}(t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

où, pour simplifier,  $V(t)$  représente  $V(x(t), \hat{p}(t))$  et  $\overline{D}(t)$  est définie par :

$$\overline{D}(t) = D(t) + \mu_2 \Psi^{-1}(\alpha r_0 e^{-\alpha t}) .$$

En effet, il suffit de montrer la propriété suivante :

$$\Psi^{-1}(\alpha r(t)) \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\Upsilon(V(\tau))\} + \Psi^{-1}(\alpha r_0 e^{-\alpha t}) . \quad (3.34)$$

D'après la définition de  $r$  dans (3.19), nous avons :

$$\Psi^{-1}(\alpha r(t)) = \Psi^{-1} \left( \alpha r_0 e^{-\alpha t} + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \Psi(\Upsilon(V(\tau))) d\tau \right) .$$

Selon le point 1 du Lemme 3.1, nous obtenons :

$$\Psi^{-1}(\alpha r(t)) \leq \Psi^{-1}(\alpha r_0 e^{-\alpha t}) + \Psi^{-1} \left( \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \Psi(\Upsilon(V(\tau))) d\tau \right)$$

ce qui implique (3.34).

Notons finalement que (3.33) n'est rien d'autre que la caractérisation GUEC (1.63) pour le système de simulation (3.7) et le modèle (3.11) en boucle fermée avec  $u = u_n(x, \hat{p})$ ,  $\hat{p}$  étant une fonction  $C^1$  du temps.  $\square$

**Notes bibliographiques.** Le fait que la caractérisation UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) permet de capturer presque tous les effets non-modélisés *linéaire* a été indiqué par Praly [62, 63]. Il est établi dans [63, Property 5] un résultat qualitatif qui dit que la stabilité de Lagrange est une propriété ouverte par rapport à la topologie du Graphe introduite par Vidyasagar [78].

### 3.1.2 Exemple illustratif

Considérons la famille de modèles indexée par un paramètre  $p \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + p x_1^2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= u \end{cases} \quad (3.35)$$

où  $(x_1, x_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$  est l'état mesuré et  $u$  dans  $\mathbb{R}$  est la commande. Choisir un élément dans cette famille peut être une façon adéquate pour obtenir un modèle pour un système dont les dynamiques sont en fait décrites par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + p^* x_1^2 - y \\ \dot{x}_2 &= u \\ \mu \dot{y} &= -y + x_1^3 \end{cases} \quad (3.36)$$

où  $y$  n'est pas mesuré et  $\mu$ , un petit paramètre de perturbation, et  $p^* \in [-p_{\max}, +p_{\max}]$  sont inconnus mais  $p_{\max} > 0$  est connu. Le modèle (3.35) peut aussi être approprié pour un système décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + p^* x_1^2 - x_1^3 + \mu y + d(t) \\ \dot{x}_2 &= u \\ \dot{y} &= -y + (1 + u^2)^\sigma - 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

avec  $d$  une fonction continue du temps bornée mais non-mesurée, et  $\sigma$  un nombre réel positif.

Précisément lorsque  $\mu$  est petit, (3.35) est le modèle d'ordre réduit du système singulièrement perturbé (3.36) et du système régulièrement perturbé (3.37).

Le problème que nous voulons résoudre est de synthétiser un régulateur adaptatif pour le modèle (3.35) garantissant la bornitude des solutions en boucle fermée ainsi que la régulation, i.e. :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = 0. \quad (3.38)$$

Nous espérons aussi que ce même régulateur donne au moins la bornitude des solutions quand il est en boucle fermée avec des systèmes “proches” du modèle (3.35) tels que les systèmes (3.36) et (3.37) lorsque  $\mu$  est assez petit.

Remarquons que les systèmes (3.36) et (3.37) vérifient (3.7) en prenant  $N = 3$ ,  $n = 2$  et :

$$X = (x_1, x_2, y)^\top, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \mathbb{R}^3.$$

Dans ce cas, l'hypothèse R (3.9) est clairement remplie. Pour vérifier l'hypothèse OE (3.10), il suffit de noter que la composante supplémentaire  $y$  d'une solution dans les deux systèmes (3.36) et (3.37) est bornée dès que les autres composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  de cette solution sont bornées ainsi que le contrôle  $u(t)$  en boucle ouverte.

Dans la suite, nous allons tout d'abord trouver les trois fonctions adéquates  $u_n$ ,  $V$  et  $W$  qui satisfont l'hypothèse S (3.12). Ensuite, nous démontrons qu'avec ces fonctions, l'hypothèse UEC( $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $\Psi$ ,  $\Upsilon$ ) (3.16) est vérifiée pour les deux systèmes (3.36) et (3.37).

### Vérification de l'hypothèse S (3.12)

En appliquant la technique d'ajout d'un intégrateur (voir [76] ou [13]), nous synthétisons un contrôleur stabilisant pour le modèle (3.35) en deux étapes :

Etape 1 : Commençons par la stabilisation du système suivant :

$$\dot{x}_1 = u_1 + px_1^2 - x_1^3. \quad (3.39)$$

Dénotons par  $u_1(x_1, p)$  et  $V_1$  les fonctions suivantes :

$$u_1(x_1, p) = -x_1 - px_1^2 + x_1^3 + v_1(x_1), \quad V_1(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (3.40)$$

où  $v_1$  est une fonction introduite comme degré de liberté et satisfaisant :

$$x_1 v_1(x_1) \leq 0 \quad \forall x_1, \quad v_1(0) = 0. \quad (3.41)$$

En appliquant  $u_1$  au système (3.39) et calculant la dérivée temporelle de  $V_1$ , on obtient :

$$\dot{V}_1 = -2V_1(x_1) + x_1 v_1(x_1) := -W_1(x_1). \quad (3.42)$$

Etape 2 : Ajoutons un intégrateur au système (3.39), i.e. considérons (3.35). Définissons :

$$V(x_1, x_2, p) = \frac{1}{2j} (2V_1(x_1))^j + \frac{1}{2} x_2^2 \quad (3.43)$$

où  $j$  est un entier strictement positif considéré comme nouveau degré de liberté et  $\chi_2$ , introduit pour simplifier les notations, est défini par :

$$\chi_2 := x_2 - u_1(x_1, p) = x_2 + x_1 + px_1^2 - x_1^3 - v_1(x_1) . \quad (3.44)$$

Notons que  $\chi_2$  est une fonction de  $(x_1, x_2, p)$ . Le long des solutions du système (3.35), la dérivée temporelle de  $V(x_1, x_2, p)$  satisfait :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -(2V_1(x_1))^{j-1} W_1(x_1) \\ &+ \chi_2 \left[ x_1 (2V_1(x_1))^{j-1} + u + \left( 1 + 2px_1 - 3x_1^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1) \right) (x_2 + px_1^2 - x_1^3) \right] . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Donc nous pouvons obtenir :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -2j V(x_1, x_2, p) + x_1 v_1(x_1) (2V_1(x_1))^{j-1} \\ &+ (x_2 + x_1 + px_1^2 - x_1^3 - v_1(x_1)) v_2(x_1, x_2, p) \\ &:= -W(x_1, x_2, p) \end{aligned} \quad (3.46)$$

en prenant la commande comme suit :

$$\begin{aligned} u &= u_n(x_1, x_2, p) \\ &:= -x_1 (2V_1(x_1))^{j-1} - \left( 1 + 2px_1 - 3x_1^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1) \right) (x_2 + px_1^2 - x_1^3) \\ &\quad - j\chi_2 + v_2(x_1, x_2, p) \end{aligned} \quad (3.47)$$

où  $v_2$ , un troisième degré de liberté, est une fonction satisfaisant :

$$\begin{aligned} (x_2 + x_1 + px_1^2 - x_1^3 - v_1(x_1)) v_2(x_1, x_2, p) &\leq 0 \quad \forall (x_1, x_2, p) \in \mathbb{R}^3 , \\ v_2(x_1, x_2, p) &= 0 \quad \forall (x_1, x_2, p) \in \{(x_1, x_2, p) : x_2 + x_1 + px_1^2 - x_1^3 - v_1(x_1) = 0\} . \end{aligned}$$

Avec (3.46), nous avons établi que le contrôleur par retour d'état  $u_n$  défini dans (3.47) garantit la stabilité globale asymptotique des solutions du modèle (3.35). D'où la satisfaction de l'hypothèse S (3.12) avec  $u_n$ ,  $W$  et  $V$  définies respectivement par (3.47), (3.46) et (3.43).

### Vérification de l'hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16)

Commençons par le système (3.36). Pour toute fonction  $C^1 \hat{p} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Pi$ , nous avons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \hat{p})) - A(x, u_n(x, \hat{p})) p^*] = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x, \hat{p}) (x_1^3 - y) . \quad (3.48)$$

Notre objectif est de spécifier la loi de commande  $u_n$  en choisissant  $j$ ,  $v_1$  et  $v_2$  indépendants de  $(\mu, y)$  afin d'établir la relation (3.18) entre les effets  $\frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1^3 - y)$  et  $V$  ou  $W$ . Mais si dans le Chapitre 1, nous avons une attitude passive en espérant le modèle était suffisamment bon pour que cette caractérisation soit satisfaite, ici grâce à la commande nous pouvons avoir une approche plus active en choisissant la commande de telle sorte que la caractérisation soit satisfaite. Nous avons :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1^3 - y) \right| &\leq \left| x_1^{2j-1} + \chi_2 \left( 1 + 2\hat{p}x_1 - 3x_1^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1) \right) \right| |x_1^3 - y| \\ &\leq 2x_1^{2j+2} + \frac{2j-1}{j+1} |\chi_2|^{\frac{2j+2}{2j-1}} \left| 1 + 2\hat{p}x_1 - 3x_1^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1) \right|^{\frac{2j+2}{2j-1}} + \frac{3}{j+1} y^{\frac{2j+2}{3}} \end{aligned} \quad (3.49)$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Young [22] (voir aussi la Section B.0). Donc, si nous choisissons  $v_1$  et  $v_2$  tels que  $W$  définie dans (3.46) satisfait :

$$2x_1^{2j+2} + \frac{2j-1}{j+1} |\chi_2|^{\frac{2j+2}{2j-1}} \left| 1 + 2px_1 - 3x_1^2 - \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1) \right|^{\frac{2j+2}{2j-1}} \leq \frac{1}{2} W(x_1, x_2, p), \quad (3.50)$$

alors, (3.49) et (3.50) impliquent :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_1}(x, \widehat{p})(x_1^3 - y) \right| \leq \frac{1}{2} W(x_1, x_2, \widehat{p}) + \frac{3}{j+1} y^{\frac{2j+2}{3}}. \quad (3.51)$$

Les expressions suivantes pour  $v_1$  et  $v_2$  satisfont la contrainte (3.50) que nous avons proposée :

$$\begin{aligned} v_1(x_1) &= -c_1 x_1^3 \\ v_2(x_1, x_2, p) &= -c_2 (x_2 + x_1 + px_1^2 - x_1^3 - v_1(x_1))^{\frac{3}{2j-1}} \left| 1 + 2px_1 - 3(1+c_1)x_1^2 \right|^{\frac{2j+2}{2j-1}} \\ &\quad - c_1 j^{\frac{j+1}{j}} (x_2 + x_1 + px_1^2 - x_1^3 - v_1(x_1))^{\frac{j+2}{j}} \end{aligned} \quad (3.52)$$

avec :

$$c_1 \geq 4, \quad c_2 \geq \frac{4j-2}{j+1}. \quad (3.53)$$

Notons que le dernier terme dans la définition de  $v_2$  n'est pas motivé par (3.50) mais par l'inégalité (3.57) à venir. Ceci donne en particulier :

$$x_1^{2j+2} \leq \frac{1}{c_1} W(x_1, x_2, p) \quad \forall (x_1, x_2, p) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.54)$$

Soient  $u(t)$  une fonction continue arbitraire définie sur  $[0, +\infty)$  et  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  une solution maximale définie sur  $[0, T)$  du système (3.36) avec  $u(t)$  comme entrée. Avec l'inégalité de Young (B.1), l'équation de  $\dot{y}$  de (3.36) entraîne :

$$\overline{\mu y^{\frac{2j+2}{3}}} \leq -y^{\frac{2j+2}{3}} + x_1^{2j+2} \quad (3.55)$$

ou encore,

$$y^{\frac{2j+2}{3}}(t) \leq \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) y^{\frac{2j+2}{3}}(0) + \frac{1}{\mu} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\mu}\right) x_1^{2j+2}(s) ds \quad \forall t \in [0, T). \quad (3.56)$$

Mais, avec (3.54) et (3.43), on s'aperçoit qu'on peut trouver une fonction  $\Upsilon$  telle que :

$$\frac{c_1}{2^{1/j}} x_1^{2j+2} \leq \Upsilon(V(x_1, x_2, p)) \leq W(x_1, x_2, p) \quad \forall (x_1, x_2, p) \in \mathbb{R}^3. \quad (3.57)$$

En effet, on peut choisir :

$$\Upsilon(V) = \frac{c_1}{2^{1/j}} (2jV)^{\frac{j+1}{j}}. \quad (3.58)$$

Notons que la valeur de  $p$  dans (3.57) est arbitraire, (3.57) et (3.56) impliquent pour tous les  $t \in [0, T)$  :

$$y^{\frac{2j+2}{3}}(t) \leq \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) y^{\frac{2j+2}{3}}(0) + \frac{2^{1/j}}{c_1 \mu} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\mu}\right) \Upsilon(V(x_1(s), x_2(s), \widehat{p}(s))) ds.$$

Maintenant, à l'aide de l'inégalité de Hölder [22], pour chaque entier fini  $q > \mu$ , nous avons :

$$\int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\mu}\right) \Upsilon(V(s)) ds \leq \left(\frac{\mu(q-1)}{q-\mu}\right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_0^t \exp(-(t-s)) \Upsilon(V(s))^q ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

où, pour simplifier les notations,  $V(s)$  signifie  $V(x_1(s), x_2(s), \widehat{p}(s))$ . Finalement observons que l'intégrale à droite de l'inégalité précédente peut être obtenue de la façon suivante :

Etant donné un nombre réel positif  $r_0$ , définissons ce qu'on appelle le signal de comparaison  $r$  par :

$$\dot{r} = -r + \Upsilon(V(t))^q, \quad r(0) = r_0. \quad (3.59)$$

Nous avons :

$$\left(\int_0^t \exp(-(t-s)) \Upsilon(V(s))^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{\frac{q-1}{q}} r^{\frac{1}{q}} - \exp\left(-\frac{t}{q}\right) r_0^{\frac{1}{q}}. \quad (3.60)$$

En conséquence, nous avons obtenu :

$$y^{\frac{2j+2}{3}}(t) \leq \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) y^{\frac{2j+2}{3}}(0) - \frac{2^{1/j}}{c_1 \mu} \left(\frac{\mu(q-1)}{q-\mu}\right)^{\frac{q-1}{q}} \exp\left(-\frac{t}{q}\right) r_0^{\frac{1}{q}} + \frac{2^{1/j}}{c_1 \mu} \left(\frac{2\mu(q-1)}{q-\mu}\right)^{\frac{q-1}{q}} r(t)^{\frac{1}{q}}.$$

Avec (3.51) et (3.59), nous avons ainsi établi l'hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) avec  $\alpha = 1$  et  $\Psi(x) = x^q$ . Précisément, nous avons pour  $t \in [0, T)$  :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_1}(x_1(t), x_2(t), \widehat{p}(t)) (x_1^3(t) - y(t)) \right| \leq \mu_1 W(x_1(t), x_2(t), \widehat{p}(t)) + \mu_2 r^{\frac{1}{q}}(t) + D(t) \quad (3.61)$$

où les constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont données par :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3 \times 2^{1/j}}{c_1 \mu(j+1)} \left(\frac{2\mu(q-1)}{q-\mu}\right)^{\frac{q-1}{q}} \quad (3.62)$$

et la fonction du temps  $D$  est définie par :

$$D(t) = \frac{3}{j+1} \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) y^{\frac{2j+2}{3}}(0) - \frac{3 \times 2^{1/j}}{c_1 \mu(j+1)} \left(\frac{\mu(q-1)}{q-\mu}\right)^{\frac{q-1}{q}} \exp\left(-\frac{t}{q}\right) r_0^{\frac{1}{q}}. \quad (3.63)$$

Rappelons que l'inégalité (3.61) est vérifiée pour n'importe quelle entrée  $u(t)$  et n'importe quelle fonction  $\widehat{p}(t)$  du temps. Notons aussi que, puisque  $q > \mu$ ,  $D(t)$  est négative pour tous les  $t$  suffisamment grand. Néanmoins, le fait que  $\sup_t D(t)$  dépend des conditions initiales est la raison d'un résultat non global en général. Pour souligner cet aspect, il est convenable de définir, pour chaque nombre réel strictement positif  $\eta$ , l'ensemble ouvert suivant :

$$\Omega_\eta = \{(x_1, x_2, y) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| < \eta\} \quad (3.64)$$

et la fonction  $\mathcal{D}$  :

$$\mathcal{D}(\eta, r_0) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+, |y(0)| < \eta} D(t) = \max \left\{ 0, \frac{3}{j+1} \eta^{\frac{2j+2}{3}} - \frac{3 \times 2^{1/j}}{c_1 \mu(j+1)} \left(\frac{\mu(q-1)}{q-\mu}\right)^{\frac{q-1}{q}} r_0^{\frac{1}{q}} \right\}. \quad (3.65)$$

Cette fonction est croissante en  $\eta$  mais décroissante en  $r_0$ . Tant que  $r_0$  est libre nous pouvons toujours le choisir pour que  $D(\eta, r_0)$  soit nulle. Mais si le signal de comparaison  $r$  intervient

explicitement dans le contrôleur, alors  $r_0$ , condition initiale de  $r(t)$ , est fixé. Alors, si pour obtenir la bornitude ou la convergence nous avons besoin que  $\sup_t D(t)$  soit suffisamment petit, disons inférieur à  $\Delta$ , notre résultat sera satisfait uniquement pour certaines conditions initiales définies comme suit : Soit  $\eta^* > 0$  défini par

$$\mathcal{D}(\eta^*, r_0) = \Delta, \quad (3.66)$$

la contrainte sur  $\sup_t D(t)$  est satisfaite si les conditions initiales  $(x_1(0), x_2(0), y(0))$  restent dans l'ensemble  $\Omega_{\eta^*}$ .

Comme nous le verrons dans la section suivante, la bornitude des solutions est garantie si (voir la preuve de la Proposition 3.1) :

$$0 < 1 - \mu_1 - 2\mu_2 = \frac{1}{2} - 2^{\frac{1}{j}} \mu^{-\frac{1}{q}} \frac{6}{c_1(j+1)} \left( \frac{2(q-1)}{q-\mu} \right)^{\frac{q-1}{q}}. \quad (3.67)$$

Ceci signifie que la bornitude peut être établie sans exiger une borne sur  $\sup_t D(t)$  (voir les discussions ci-dessus) mais à condition que, pour certain nombre réel  $c_3$  dans  $(0, 1)$ ,

$$\left( \frac{12}{2^{-\frac{1}{j}} c_1(j+1)} \right)^q \left( \frac{2(q-1)}{(1-c_3)q} \right)^{q-1} < \mu \leq c_3 q. \quad (3.68)$$

Ceci impose une restriction sur  $\mu$ . Remarquons cependant que si, dans le contrôleur  $u_n$ ,  $c_1$  est choisi tel que :

$$\frac{24}{2^{-\frac{1}{j}}(j+1)(1-c_3)} < c_1, \quad (3.69)$$

alors en choisissant  $q$  suffisamment grand dans la définition de  $r$ , le domaine des valeurs admissibles de  $\mu$  peut être rendu aussi grand que l'on veut.

Retournons maintenant au système (3.37). Notons que dans ce cas, l'équation (3.48) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \hat{p})) - A(x, u_n(x, \hat{p})) p^*] = \frac{\partial V}{\partial x_1}(x, \hat{p}) (\mu y + d(t)). \quad (3.70)$$

Soit  $\hat{p}(t)$  une fonction  $C^1$  bornée arbitraire, définie sur  $[0, +\infty)$ . Soit  $(x_1(t), x_2(t), y(t))$  une solution maximale définie sur  $[0, T)$  du système (3.37) avec

$$u = u_n(x_1, x_2, \hat{p}(t))$$

considérée comme entrée. Notons que  $u$  n'est plus arbitraire comme c'était le cas précédemment.

Notre but est de vérifier si une inégalité sous la forme (3.61) est satisfaite, avec la même définition (3.59) pour le signal de comparaison  $r$ . Comme dans le cas précédent avec (3.57), une telle inégalité existe si nous pouvons trouver des constantes  $\delta_1$  et  $D_1$  telles que, pour tous les  $t \in [0, T)$ , nous avons :

$$[(1 + u_n^2(x_1(t), x_2(t), \hat{p}(t)))^\sigma - 1]^{\frac{2j+2}{3}} \leq \delta_1 \Upsilon(V(x_1(t), x_2(t), \hat{p}(t)) + D_1). \quad (3.71)$$

Après de longs calculs et l'utilisation de l'inégalité de Young, on peut montrer que ces constantes existent à condition que :

$$\sigma \leq \frac{3}{10}, \quad \frac{3+8\sigma}{6-14\sigma} \leq j \leq \frac{3+2\sigma}{4\sigma}. \quad (3.72)$$

Ces contraintes illustrent la difficulté qui peut être produite par l'action directe de la commande sur les dynamiques non-modélisées. Notamment en augmentant la valeur de  $j$  qui peut être interprétée comme une augmentation du gain du contrôleur (voir (3.47)) on risque d'exciter ces dynamiques non-modélisées de manière telle que la stabilité n'est plus garantie en certain point.



## 3.2 Bornitude robuste

L'objectif de cette section est d'examiner si R (3.9) , OE (3.10) , S (3.12) et UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) sont les hypothèses suffisantes pour garantir l'existence d'un contrôleur résolvant notre problème. Notre étude se déroule suivant l'ordre croissant de difficultés.

### 3.2.1 $p^*$ donné et constant

Pour le cas  $p^*$  donné et constant, puisque la commande est donnée, on est dans le cas sans commande. Due à la Remarque 3.1, ce cas a donc déjà été traité avec GUEC (1.63) . Comme un corollaire de la Proposition 1.2 avec :

$$D = D(t) + \mu_2 \Psi^{-1}(\alpha r_0 e^{-\alpha t})$$

et la loi de commande suivante :

$$u = u_n(x, p^*) , \quad (3.73)$$

nous avons :

**Corollaire 3.2** : *Sous les hypothèses OE (3.10) et S (3.12) , si, pour certains  $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ , l'hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) est vérifiée avec  $p^*$  connu et constant, i.e.  $\rho = 0$ , et :*

$$1 - \mu_1 - \mu_2 - \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega) + \mu_2 \Psi^{-1}(\alpha r_0)}{\Upsilon(v)} > 0 \quad (3.74)$$

*alors toutes les solutions de (3.7)-(3.73) avec  $X(0) \in \Omega$  sont bien définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées. De plus, si, pour un certain instant  $T_0 > 0$ ,  $D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0$  dans (3.18), alors :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mathcal{E} . \quad (3.75)$$

Mais on peut ajouter que, dans le cas UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) , une autre preuve (voir la Section D.1) est possible avec la fonction de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{V}(x, r) = I(V(x, p^*)) + \frac{\varepsilon}{2} r^2 \quad (3.76)$$

avec  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif et  $I(V)$  la fonction définie par :

$$I(V) = \int_0^V \frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)} dv . \quad (3.77)$$

Dans ce cas, nous avons besoin de l'hypothèse R (3.9) et de remplacer (3.74) par :

$$1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} > 0 . \quad (3.78)$$

Ce qui serait intéressant d'ajouter c'est la robustesse de la bornitude *globale* par rapport à  $\Delta p$  si, au lieu de  $p^*$ , on utilise  $p^* + \Delta p$ , i.e.  $u = u_n(x, \hat{p})$ ,  $\hat{p} = p^* + \Delta p$  (voir Pomet-Praly [59]). Pour cela, on a sûrement besoin d'une hypothèse sur  $\frac{\partial V}{\partial p}$ . On reviendra sur ce point dans les paragraphes suivants.

Remarquons que si  $\liminf_{v \rightarrow +\infty} \Upsilon(v) = +\infty$ , il n'y a aucune contrainte sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  et que (3.74) est moins restrictive que (3.78). Il en résulte que notre résultat tient globalement, i.e. pour chaque condition initiale  $X(0)$ . En outre,  $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$  sont encore à notre disposition

puisqu'ils ne sont pas utilisés dans notre contrôleur. En particulier,  $\alpha$  peut être choisi dépendant du paramètre de perturbation singulière si nécessaire (voir les discussions après (3.69)). Nous pouvons aussi choisir  $r_0$  dépendant de la valeur initiale  $X(0)$  de façon que  $D(t)$  puisse satisfaire l'hypothèse  $D(t) \equiv 0 \forall t > T_0$  pour un certain instant  $T_0$  (voir (3.65) pour une illustration).

**Remarque 3.2** Dans ce cas particulier, le signal de comparaison  $r$ , défini par l'équation différentielle (3.19), n'est pas utile pour la bornitude des solutions ni pour la convergence.  $\square$

### 3.2.2 $p^*$ inconnu et dépend du temps, $V$ ne dépend pas de $p$

Quand le vecteur  $p^*$  est inconnu et varie avec le temps, la loi de commande (3.73) ne peut pas être mise en pratique. A la place de  $u_n(x, p^*)$ , on utilise un contrôleur dynamique dont l'état est  $\hat{p}$  :

$$\dot{\hat{p}} = \mathcal{F}(x, \hat{p}), \quad u = u_n(x, \hat{p}) \quad (3.79)$$

qui peut être obtenu en appliquant la synthèse de Lyapunov traditionnelle (voir [56] par exemple). On vient de mentionner que  $\mathcal{V}$  définie dans (3.76) est une fonction de Lyapunov adéquate pour le cas où la vraie valeur de  $p^*$  est connue. Puisque l'équation du modèle est linéaire en le paramètre vectoriel, nous pouvons essayer la fonction de Lyapunov de contrôle suivante :

$$U(x, r, \hat{p}) = I(V(x, \hat{p})) + \frac{\varepsilon}{2} r^2 + \frac{\lambda}{2} |\hat{p} - p^*|^2 \quad (3.80)$$

où  $\lambda$  est un nombre réel strictement positif. En d'autres termes, on va trouver la fonction  $\mathcal{F}$  dans (3.79) telle que la dérivée temporelle de  $U$  le long des solutions du modèle bouclé (3.11)-(3.19)-(3.79) – qui n'est pas (3.7)-(3.79) – est négative en supposant (mais pour la synthèse seulement) que  $p^*$  est constante. Si de telles solutions existent, on obtient avec (3.13) dans l'hypothèse S (3.12) et (3.15) :

$$\dot{U} \leq -\Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + \varepsilon r \Psi + \left( \lambda \dot{\hat{p}}^\top - \frac{\Psi^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial x} A \right) (\hat{p} - p^*) + \frac{\Psi^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial p} \dot{\hat{p}}. \quad (3.81)$$

Par conséquent, dans le cas où  $V$  ne dépend pas de  $p$ , ceci nous suggère la solution suivante :

$$\mathcal{F}(x, \hat{p}) = \frac{1}{\lambda} \frac{\Psi(\Upsilon(V(x)))^2}{\Upsilon(V(x))} A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x)^\top. \quad (3.82)$$

Notons que, en conséquence de notre analyse, les valeurs de  $\varepsilon$  et  $r_0$  ne sont pas utilisées dans le contrôleur. De plus, on sait que  $p^*$  reste dans un convexe compact connu  $\Pi$ . Nous utilisons cette connaissance préalable en projetant  $\mathcal{F}$  sur la frontière de  $\Pi$  chaque fois que  $\hat{p}$  est sur cette frontière et  $\mathcal{F}$  se dirige vers l'extérieur de  $\Pi$ . Le contrôleur suivant s'ensuit :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{p}} &= \text{Proj} \left( \hat{p}, \frac{\Psi(\Upsilon(V(x)))^2}{\lambda \Upsilon(V(x))} A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x)^\top \right) \\ u &= u_n(x, \hat{p}) \end{aligned} \quad (3.83)$$

avec  $\hat{p}(0)$  un point intérieur de  $\Pi$ , i.e.  $\hat{p}(0) \in \overset{\circ}{\Pi}$  et, avec quelques restrictions supplémentaires mais faibles sur l'ensemble  $\Pi$  (voir Praly *et al.* [64, Assumption ICS (94)]), la fonction Proj peut être rendue localement lipschitzienne.

Il reste à étudier les propriétés que ce contrôleur procure au système actuel (3.7)-(3.83). Nous avons :

**Proposition 3.1** *Sous les hypothèses R (3.9) , OE (3.10) et S (3.12) , si la fonction  $V$  est indépendante de  $p$ , si, de plus pour certains  $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ , UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) est satisfaite avec :*

$$1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} > 0 \quad (3.84)$$

et  $|\dot{p}^*| \leq \rho$ , si  $\lambda$  est choisi assez petit pour que :

$$\lambda \rho \sup_{(p_1, p_2) \in \Pi^2} |p_1 - p_2| < \left( 1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} \right) \liminf_{v \rightarrow +\infty} \Psi(\Upsilon(v))^2, \quad (3.85)$$

alors, toutes les solutions de (3.7)-(3.83) avec  $X(0) \in \Omega$  sont bien définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées. De plus, si  $\rho = 0$  et, pour un certain instant  $T_0 > 0$ ,  $D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0$  dans (3.18), alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mathcal{E}. \quad (3.86)$$

*Preuve :* voir Chapitre D. □

Remarquons que :

- 1 – L’inégalité (3.85) indique que plus la vitesse  $\rho$  du vecteur inconnu  $p^*$  est grande ou plus les incertitudes paramétriques  $\sup_{(p_1, p_2) \in \Pi^2} |p_1 - p_2|$  sont larges, plus l’adaptation doit être rapide.
- 2 – La Proposition 3.1 confirme une des conclusions qui peuvent être tirées des travaux de Reed et Ioannou [67] et Campion et Bastin [10] pour les bras de robot. Dans le cas où on peut choisir  $V$  indépendante du paramètre estimé  $\hat{p}$ , la seule modification nécessaire, par rapport au cas où le paramètre est connu, est de garantir la bornitude du paramètre estimé  $\hat{p}$ . A la place de la projection utilisée ici et dans [10], Reed et Ioannou ont proposé la technique de  $\sigma$ -modification.
- 3 – Le signal de comparaison  $r$  n’est pas explicitement utilisé par le contrôleur (3.83). Il en résulte que  $\alpha, r_0$  sont encore libres (voir les commentaires après la Proposition 3.2).
- 4 – Dans le cas où des perturbations singulières sont présentes, seulement un résultat local est obtenu dans [10] et [67]. Ceci est dû au fait que, dans ces deux cas, la commande apparaît dans le sous-système rapide. Dans notre contexte, ceci signifie que nous ne connaissons pas le quadruplet  $(\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon)$  tel que UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) est satisfaite.
- 5 – La robustesse de la stabilité de Lagrange a été aussi établie localement par Taylor *et al.* [73] pour des modèles linéarisables par bouclage avec un difféomorphisme indépendant du paramètre inconnu. Cette indépendance implique notre hypothèse que  $V$  est indépendante de  $p$ . Il y a cependant une possibilité d’étendre ces résultats au cas où  $V$  dépend du paramètre estimé si une condition de matching est satisfaite (voir [32, 64]). En effet si cette condition est valable, il est possible d’augmenter le contrôle en :

$$u = u_n(x, \hat{p}) + v(x, \hat{p}, \dot{\hat{p}}) \quad (3.87)$$

où  $v$  est choisi pour supprimer le terme  $\frac{\Psi^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial p} \dot{\hat{p}}$  dans (3.81). Malheureusement dans ce cas l’hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) n’est pas suffisante car  $u$  n’est plus dans la classe  $u_n(\cdot, \hat{p})$ . On doit rendre UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) plus restrictive :

pour chaque fonction  $C^1$  du temps  $\hat{p} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Pi$  et chaque solution  $X(t)$  de :

$$\dot{X} = F(X, t, u_n(H(X, t), \hat{p})) , \quad X(0) \in \Omega , \quad (3.88)$$

par :

pour chaque fonction  $C^1$  du temps  $\hat{p} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \Pi$  et  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  et chaque solution  $X(t)$  de :

$$\dot{X} = F(X, t, u(t)) , \quad X(0) \in \Omega . \quad (3.89)$$

### 3.2.3 $p^*$ inconnu mais constant, $V$ dépend de $p$

Lorsque  $V$  dépend de  $p$  nous avons le terme supplémentaire  $\frac{\Psi^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial p} \dot{\hat{p}}$  dans (3.81). Si un tel terme ne peut pas être annulé pas le contrôle (cas de la condition de matching), on est obligé de le considérer comme une perturbation et de synthétiser un contrôleur garantissant la robustesse de la bornitude des solutions par rapport à cette perturbation. Pour atteindre cet objectif, on propose de remplacer la fonction de Lyapunov de contrôle  $U$  dans (3.80) par :

$$U(x, r, \hat{p}) = L \left[ I(V(x, \hat{p})) + \frac{\varepsilon}{2} r^2 \right] + \frac{\lambda}{2} |\hat{p} - p^*|^2 \quad (3.90)$$

où la fonction  $L$  reste à être choisie. Pour cette nouvelle fonction  $U$ , la même synthèse de Lyapunov que dans le paragraphe 3.2.2 – sans la projection – entraîne l'inégalité suivante, remplaçant (3.81) :

$$\dot{U} \leq - \left[ \Psi^2 + \varepsilon \alpha r^2 - \varepsilon \alpha r \Psi - \frac{1}{\lambda} \left( \frac{\Psi^2}{\Upsilon} \right)^2 \frac{\partial V}{\partial p} A^\top \frac{\partial V}{\partial x} L' \right] L' \quad (3.91)$$

où  $L'$  est la dérivée de  $L$ . On s'aperçoit que, pour rendre le dernier terme dans les crochets petit, la dérivée  $L'$  devrait être positive mais aussi petite que possible pour que  $L$  reste définie positive et propre. Ceci nous suggère le choix de  $L(x) = \log(1 + x)$  et de proposer le contrôleur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\alpha r + \Psi(\Upsilon(V(x, \hat{p}))) , \quad r(0) = r_0 \\ \dot{\hat{p}} &= \text{Proj} \left( \hat{p}, \frac{\frac{\Psi(\Upsilon(V(x, \hat{p})))^2}{\Upsilon(V(x, \hat{p}))} A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})^\top}{(1 + I(V(x, \hat{p})) + \frac{\varepsilon}{2} r^2) \lambda} \right) \\ u &= u_n(x, \hat{p}) \end{aligned} \quad (3.92)$$

avec  $\hat{p}(0) \in \overset{\circ}{\Pi}$  et  $I$  définie dans (3.77). Notons que  $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$  sont utilisés dans ce contrôleur. Dans ce cas, nous avons :

**Proposition 3.2** : *En plus des hypothèses R (3.9) , OE (3.10) et S (3.12) , supposons que, pour tous les  $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \Pi$ , on ait :*

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \right| \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) A(x, u_n(x, p)) \right| \leq d \left( 1 + \int_0^{V(x, p)} \Upsilon(v) dv \right) \quad (3.93)$$

où  $d$  est un nombre réel positif. Dans le contrôleur, choisissons  $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon, \varepsilon$  et  $\lambda$  tels que :

1 – Pour un certain nombre réel positif  $k$ ,  $\frac{(1 + \int_0^v \Upsilon(t) dt)^k}{1 + \int_0^v \frac{\Psi(\Upsilon(t))^2}{\Upsilon(t)} dt}$  est une fonction non-décroissante pour  $v \geq 0$ ,

$$2 - \quad \varepsilon < 2 \alpha \left( 1 - \frac{dk}{\lambda} \right) . \quad (3.94)$$

Sous ces conditions si  $UEC(\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon)$  (3.16) est satisfaite avec  $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$  défini précédemment et en outre  $\mu_1, \mu_2, \mathcal{D}(\Omega), \rho$  satisfont  $\rho = 0$  et :

$$(\varepsilon + \alpha \mu_2)^2 < 2 \alpha \varepsilon \left( 1 - \mu_1 - \mu_2 - \frac{dk}{\lambda} - \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} \right) \quad (3.95)$$

alors, toutes les solutions de (3.7)-(3.92) avec  $X(0) \in \Omega$  sont bien définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées. De plus, si, pour un certain instant  $T_0 > 0$ ,  $D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0$  dans (3.18), alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mathcal{E} \quad (3.96)$$

*Preuve :* voir Chapitre D. □

**Remarque 3.3** L'inégalité (3.93) généralise la condition de croissance introduite dans [59] pour le cas  $\Upsilon(v) = v$  :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \right| \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) A(x, u_n(x, p)) \right| \leq d(1 + V(x, p)^2) .$$

□

**Remarque 3.4** Le contrôleur adaptatif (3.92) exige un signal de normalisation *dynamique* qui n'était pas présent dans le contrôleur adaptatif (2.104) établi dans la Section 2.4. Par ailleurs, dans la Section 2.4, le théorème du petit gain était utilisé et on n'avait pas besoin de fonctions de Lyapunov pour les deux sous systèmes (voir (2.100), (2.101)). Le prix de cette généralité est que malheureusement, aucun résultat de convergence n'était dégagé dans la Section 2.4. □

Egalement, nous remarquons que :

1 – Le signal de comparaison  $r$  étant explicitement utilisé dans le contrôleur,  $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $\Psi$ ,  $\Upsilon$  ne sont plus des paramètres libres, on doit les ajuster tels que l'hypothèse UEC( $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $\Psi$ ,  $\Upsilon$ ) (3.16) est satisfaite. Ce cas est opposé à celui de Proposition 3.1 (voir la Remarque 3 après la Proposition 3.1).

2 – La condition monotonie de  $\frac{(1+\int_0^v \Upsilon(t)dt)^k}{1+\int_0^v \frac{\Psi(\Upsilon(t))^2}{\Upsilon(t)}dt}$  est une condition technique faible sur les fonctions  $\Psi$  et  $\Upsilon$ . Par exemple, elle est satisfaite par :

$$\Upsilon(v) = v^n \quad , \quad \Psi(v) = v^m \quad , \quad k \geq (2m-2)n + \frac{(2m-1)n+1}{n+1}$$

ou par :

$$\Upsilon(v) = \frac{v}{v+1} \quad , \quad \Psi(v) = v^m \quad , \quad k \geq 2^{2m+1} .$$

3 – Par contraste avec la Remarque 1 après la Proposition 3.1, ici  $\lambda$  devait être suffisamment grand de manière que (3.94) soit satisfaite. C'est le fameux compromis entre la robustesse et l'adaptation rapide.

4 – Toutes nos hypothèses sont satisfaites si le système devant être contrôlé est linéaire,  $V$  est quadratique en  $x$ ,  $u_n$  est linéaire en  $x$ ,  $\Psi(\Upsilon) = \Upsilon$  et  $\Upsilon(v) = cv$ . Dans ce cas (3.92) est un nouveau – autant qu'on le sache – contrôleur adaptatif linéaire qui n'a besoin d'aucune erreur augmentée.

**Exemple (suite) :**

Durant les discussions et les analyses dans la Section 3.1.2, nous avons vu que les hypothèses R (3.9) , OE (3.10) , S (3.12) et UEC( $\alpha$ ,  $r_0$ ,  $\Psi$ ,  $\Upsilon$ ) (3.16) sont satisfaites pour les deux systèmes (3.36) et (3.37) dont les modèles de synthèse sont (3.35). Maintenant nous voulons montrer que

la condition de croissance (3.93) est satisfaite par  $V$  et  $\Upsilon$ , définies respectivement par (3.43) et (3.58). En effet, nous avons :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p}(x_1, x_2, p) \right| = |\chi_2 x_1^2| \leq (2V)^{\frac{1}{2}} (2jV)^{\frac{1}{j}} \quad (3.97)$$

et :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1^2 \right| &= |x_1^{2j+1} + \chi_2 (1 + 2px_1 - 3(1 + c_1)x_1^2) x_1^2| \\ &\leq (2jV)^{\frac{2j+1}{2j}} + (2V)^{\frac{1}{2}} (2jV)^{\frac{1}{j}} \left( 1 + 2p_{\max} (2jV)^{\frac{1}{2j}} + 3(1 + c_1) (2jV)^{\frac{1}{j}} \right). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Donc, il existe deux nombres réels positifs  $c_4$  et  $c_5$  tels que :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p} \right| \left| \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1^2 \right| \leq c_4 V^{\frac{3j+3}{2j}} + c_5. \quad (3.99)$$

Mais vu le fait que d'après (3.58) nous avons l'égalité :

$$\int_0^V \Upsilon(v) dv = \frac{c_1 j (2j)^{\frac{j+1}{j}}}{2j+1} V^{\frac{2j+1}{j}}, \quad (3.100)$$

(3.93) s'ensuit.

Due à la remarque 3 suivant la Proposition 3.2, en utilisant cette proposition, notre nouveau régulateur adaptatif appliqué à (3.36) et (3.37) garantit la robustesse de la bornitude globale des solutions  $(x_1, x_2)$ .

### 3.3 Discussions

Comme nous l'avons dit dans la Section 3.0, c'est dans le but d'exhiber des propriétés de *convergence* pour le cas adaptatif que nous introduisons ici une forme plus spécifique que la caractérisation GUEC (1.63) du Chapitre 1. En effet, avec les hypothèses OE (3.10) et S (3.12), GUEC (1.63) ou précisément (3.3) et (3.4) impliquent la propriété de bornitude des solutions du système bouclé. Nous avons :

**Proposition 3.3** *Supposons que les hypothèses OE (3.10) et S (3.12) sont satisfaites avec l'existence d'une constante positive  $d$  et d'une fonction  $\Upsilon$  de classe  $K_\infty$  telles que :*

$$W(x, p) \geq \Upsilon(V(x, p)) \quad \forall (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \Pi,$$

et que, pour tout  $(x, p) \in \mathbb{R}^n \times \Pi$ ,

$$\left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, p) \right| \cdot \left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, p) A(x, u_n(x, p)) \right| \leq d \left( 1 + \int_0^{V(x, p)} \Upsilon(v) dv \right). \quad (3.101)$$

Avec la caractérisation GUEC (1.63) du Chapitre 1, i.e. (voir (3.3) et (3.4)) :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p}) [\dot{x} - a(x, u_n(x, \hat{p})) - A(x, u_n(x, \hat{p})) p^*] \right| \leq \mu_1 W(x(t), \hat{p}(t)) + \mu_2 r(t) + D \quad (3.102)$$

$$r(t) := \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{ \Upsilon(V(x(\tau), \hat{p}(\tau))) \} \quad (3.103)$$

où  $p^*$  est un paramètre constant inconnu, si :

$$1 - \mu_1 - \mu_2 > 0 , \quad (3.104)$$

nous pouvons concevoir un contrôleur adaptatif

$$u = u_n(x, \hat{p}) , \quad \dot{\hat{p}} = \chi(x, \hat{p}) \quad (3.105)$$

qui rend les solutions de (3.7)-(3.105) avec  $X(0) \in \Omega$  bien définies sur  $[0, +\infty)$ , uniques et bornées.

**Remarque 3.5** Nous avons indiqué que  $\text{UEC}(\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon)$  (3.16) entraîne  $\text{GUEC}$  (1.63) (voir la Remarque 3.1). Ceci se traduit, dans le cas de la commande adaptative, par le fait que  $\text{GUEC}$  (1.63) permet de contenir plus d'incertitudes que  $\text{UEC}(\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon)$  (3.16) (comparer (3.104) avec (3.84) et (3.95)). Malheureusement, on n'a pu établir qu'un résultat de bornitude dans la Proposition 3.3, à savoir que la propriété de bornitude des solutions n'est pas satisfaisante pour aborder des applications.  $\square$

Dans la suite, on résume l'idée de démonstration de la Proposition 3.3.

Comme dans la Section 2.4, considérons la fonction suivante (voir (2.87)) :

$$U(x, \hat{p}) = L(V(x, \hat{p})) + \frac{1}{2}|\hat{p} - p^*|^2$$

où  $L$  est une fonction  $C^1$  de classe  $K_\infty$ . Avec un choix approprié de  $\hat{p}$  et de  $L$  (voir (2.89), (2.102)), selon (3.102), (3.103), la dérivée temporelle de  $U$  satisfait (voir (2.92), (2.111)) :

$$\dot{U} \leq \varphi_0(V) \left[ -(1 - \mu_1 - \mu_0)\Upsilon(V) + \mu_2 \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\Upsilon(V(\tau))\} + D \right] \quad (3.106)$$

où  $\mu_0$  est un réel dans  $[0, 1 - \mu_1 - \mu_2)$ ,  $\varphi_0$  est une fonction continue positive.

Au moyen de la technique de projection utilisée ici et dans la Section 2.4, on peut garantir que  $\hat{p}$  reste dans  $\Pi$ . En suivant les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 1.2, nous pouvons conclure la bornitude des solutions du système bouclé.

### 3.4 Résumé

L'intérêt de considérer un signal de normalisation dans l'étude de la robustesse de la stabilité de Lagrange des systèmes linéaires est maintenant bien connu. En particulier, il est montré dans [63] que cette technique permet de capturer toutes les dynamiques non-modélisées linéaires possibles. La généralisation de cette notion au cas nonlinéaire est l'idée principale rapportée dans ce chapitre. En combinant cette technique avec une synthèse de Lyapunov et une condition de croissance nous avons pu établir des résultats nouveaux de stabilité de Lagrange ainsi que de convergence asymptotique des solutions pour des systèmes nonlinéaires avec des incertitudes à la fois paramétriques et dynamiques. Néanmoins dans la première étape, nous n'avons que traité la cas global et le cas local est encore ouvert. Finalement on signale que, à cause de l'introduction du signal de normalisation (dynamique), la dynamique du contrôleur adaptatif ici est de dimension plus grande que celle du paramètre. Par contre dans la Section 2.4 nous avons présenté une autre approche fondée sur le théorème du petit-gain pour un système interconnecté et la dimension du contrôleur obtenu est égale exactement à celle du paramètre.





# Conclusions

Ce travail a permis de montrer les possibilités de combiner la seconde méthode de Lyapunov avec d'autres techniques pour apporter des solutions nouvelles au problème de stabilisation robuste des systèmes nonlinéaires. La méthodologie adoptée ici était l'utilisation d'un modèle de synthèse simplifié mais complété par des informations sur les effets négligés existant dans le système réel. Pour savoir quels types d'informations pourraient être utiles, nous avons tout d'abord étudié et proposé des caractérisations des effets non-modélisés de sorte que bornitude des solutions ou même convergence puissent être prouvées.

Nous avons vu au Chapitre 1 que l'introduction de la notion SpES a motivé un théorème du petit gain généralisé contenant un résultat du genre entrée-sortie et un résultat du genre Lyapunov. Ceci est un point important à souligner dans la décomposition d'un système. En effet, par rapport à l'approche entrée-sortie classique, cette caractérisation SpES a permis d'étudier le comportement des variables internes du système en plus de celui d'entrée-sortie. Nous avons également présenté une autre caractérisation GUEC qui diffère un peu de SpES et ne repose que sur la méthode de Lyapunov. Au cours de l'étude, un signal de comparaison (utilisable) a été introduit dans le but d'informer sur la "taille" des effets non-modélisés (non disponibles).

Le Chapitre 2, consacré à la stabilisation d'une classe de systèmes rétroactifs récurrents incertains, a fourni des résultats très probants concernant l'application du théorème du petit gain à la commande. Malheureusement, le théorème du petit gain appliqué à une classe de systèmes adaptatifs ne nous a permis que d'établir la propriété de bornitude des solutions et non leur convergence.

Pour traiter les aspects de convergence asymptotique des systèmes adaptatifs nonlinéaires, nous avons introduit au Chapitre 3 une technique de normalisation dynamique. Nous avons pu constater que cette idée, dont l'importance était bien connue dans la commande adaptative *linéaire*, était aussi prometteuse dans la commande adaptative *nonlinéaire*.

Dans cette étude, nous nous sommes contentés d'établir des résultats qualitatifs. Il reste à vérifier l'applicabilité à des systèmes pratiques et à quantifier l'aspect "robustesse" de nos algorithmes.



# Annexe A

## Notions et Théorèmes de Stabilité

Nous révisons ici quelques notions particulières de stabilité.

Tout d'abord, nous donnons certaines terminologies standards dans la théorie de stabilité (voir [20]). Durant tout ce mémoire, nous utilisons  $|\cdot|$  pour signifier la norme Euclidienne d'un vecteur et  $\|\cdot\|$  pour signifier la norme supérieure d'une fonction mono-variable (par exemple, pour n'importe quelle fonction mesurable  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\|u\| = \text{ess.sup.}\{|u(t)|, t \geq 0\}$ ).

### Définition A.1

- (1) Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite définie positive si pour tout  $x \neq 0$ ,  $V(x) > 0$  et  $V(0) = 0$ .
- (2) Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite définie négative si  $-V$  est définie positive.
- (3) Une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite propre si  $V(x) \rightarrow \infty$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ .
- (4) Une fonction  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite de classe  $K$  si elle est continue, strictement croissante et satisfait  $\gamma(0) = 0$ . Elle est de classe  $K_\infty$  si en plus elle est propre.
- (5) Une fonction  $\beta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est dite de classe  $KL$  si, pour chaque  $t$  fixé, la fonction  $\beta(\cdot, t)$  est de classe  $K$  et, pour chaque  $s$  fixé, la fonction  $\beta(s, \cdot)$  est décroissante et  $\beta(s, t) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .
- (6) Etant donnée une fonction  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , pour chaque couple de nombres positifs  $0 \leq s < t < +\infty$ , la fonction tronquée de  $u$  sur  $[s, t]$ , notée  $u_{[s,t]}$ , est définie par :

$$u_{[s,t]} = \begin{cases} u(\tau) & \text{si } \tau \in [s, t] \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

En particulier,  $u_{[0,t]}$  est équivalente à la fonction tronquée standard de  $u$  en  $t$  i.e.  $u_t$ .

Considérons maintenant le modèle et le système de simulation introduits dans la Section 1.1 où le terme de perturbations  $\omega$  n'est dépendant que de  $(x, t)$  :

$$\text{modèle} \quad \dot{x} = f(x, t) , \quad (\text{A.1})$$

$$\text{système de simulation} \quad \dot{x} = f(x, t) + \omega(x, t) . \quad (\text{A.2})$$

**Définition A.2** Dans le cas où  $f$  est indépendant de  $t$ , l'équilibre  $x = 0$  de (A.1) est stable au sens fort de Lagrange s'il existe une fonction positive et propre  $V(x)$  telle que pour  $x$  dans un voisinage de l'origine, nous avons :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x) \leq 0 . \quad (\text{A.3})$$

Si, de plus, (A.3) est satisfaite pour tous les  $x$ , alors on dit que l'équilibre est globalement stable au sens fort de Lagrange.

**Remarque A.1** D'après un théorème inverse de Lyapunov (voir [20, Theorem 48.1]), la stabilité asymptotique au sens de Lyapunov implique la stabilité forte de Lagrange, mais pas réciproquement.  $\square$

**Définition A.3** L'équilibre  $x = 0$  de (A.1) est totalement stable si pour chaque  $\varepsilon > 0$ , il existe deux nombres réels positifs  $\delta_1(\varepsilon)$  et  $\delta_2(\varepsilon)$  tels que  $|x_0| < \delta_1$  et  $|\omega(x, t)| < \delta_2$  impliquent que la solution  $x(t)$  de (A.2), avec  $x(t_0) = x_0$ , satisfait  $|x(t)| < \varepsilon$ .

Le théorème suivant montre la relation de la stabilité totale avec la stabilité asymptotique dans le sens de Lyapunov.

**Théorème A.1** ([20, Theorem 56.4]) Si l'équilibre  $x = 0$  de (1.2) est uniformément asymptotiquement stable, alors il est totalement stable.

**Preuve :** D'après le Théorème Inverse de Lyapunov [20, Theorem 49.3], la stabilité asymptotique uniforme de  $x = 0$  de  $\dot{x} = f(x, t)$  implique l'existence d'une fonction de Lyapunov  $V(x, t)$ , et de trois fonctions définies positives  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) telles que pour tout  $x$  dans  $B_r = \{x \mid |x| < r\}$  avec  $r > 0$ ,

$$\begin{aligned}\alpha_1(|x|) &\leq V(x, t) \leq \alpha_2(|x|) \\ \dot{V}(x, t) &\leq -\alpha_3(|x|)\end{aligned}$$

Puisque  $B_r$  est un ensemble borné, il existe un nombre réel positif  $r_0$  tel que pour tout  $1 \leq i \leq n = \dim(x)$ ,

$$\left| \frac{\partial V}{\partial x_i}(x, t) \right| \leq r_0 \quad \forall x \in B_r, \quad \forall t \geq t_0. \quad (\text{A.4})$$

La dérivée de  $V$  le long des solutions de (A.2), notée par  $\dot{V}_{(A.2)}$ , s'écrit comme :

$$\dot{V}_{(A.2)} = \dot{V}_{(A.1)} + \sum_i \omega_i \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (\text{A.5})$$

où  $\omega_i$  est la  $i$ -ème composante de  $\omega$ . Etant donné n'importe quel  $0 < \varepsilon < r$ , il existe  $\delta_1$  et  $\delta_2$  tels que

$$\alpha_1(\varepsilon) > \alpha_2(\delta_1), \quad |\omega(x, t)| < \delta_2 \quad \forall x \in B_r. \quad (\text{A.6})$$

Dénotons

$$r_1 := \inf_{\delta_1 \leq |x| \leq \varepsilon} \{\alpha_3(|x|)\}.$$

Pour toutes les solutions  $x(t)$  avec  $|x(t_0)| < \delta_1$  qui entrent dans la région  $\delta_1 \leq |x| \leq \varepsilon$  à un instant  $t_1 \geq t_0$ , vu (A.4), (A.5) et (A.6), nous obtenons :

$$\dot{V}_{(A.2)} \leq -r_1 + nr_0\delta_2.$$

Si l'on choisit  $\delta_2$  dans  $(0, r_1/(nr_0))$ , alors  $V$  est strictement décroissante après l'instant  $t_1$ , ce qui implique  $|x(t)| < \varepsilon$ . D'où la stabilité totale de l'équilibre.  $\blacksquare$

Puis, nous introduisons une autre notion importante de stabilité en présence d'incertitudes non évanescentes (par exemple, dans (A.2),  $\omega(0, \cdot) \not\equiv 0$ ). Dans ce cas, l'origine  $x = 0$ , qui est un équilibre de (A.1), peut ne pas être un équilibre du système de simulation (A.2). Comme dans le cas de la stabilité totale, la convergence des solutions vers l'origine, lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , est pratiquement impossible. C'est pourquoi nous cherchons une propriété moins forte que la convergence – la *bornitude ultime*. Cette notion caractérise le fait que si  $\omega$  est petite en un sens,

les solutions du système perturbé sont petites après une très longue durée. Par opposition à la stabilité totale, l'aspect global de la bornitude ultime est aussi intéressant que son aspect local. La définition précise est :

**Définition A.4** ([37]) *Les solutions de  $\dot{x} = f(x, t)$  sont uniformément ultimement bornées s'il existe deux constantes positives  $b$  et  $c$  telles qu'à chaque  $\alpha \in (0, c)$ , est associée une constante positive  $T = T(\alpha)$  satisfaisant :*

$$|x(t_0)| < \alpha \implies |x(t)| < b, \quad \forall t > t_0 + T. \quad (\text{A.7})$$

*Elles sont globalement uniformément ultimement bornées si (A.7) existe pour n'importe quelle valeur de  $\alpha$ .*

Nous appellerons la constante  $b$  la *borne ultime*. Un critère très utile pour la bornitude ultime uniforme est Khalil [37, Theorem 4.10, pp. 202] :

**Théorème A.2** [37] *Soient  $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$  avec  $r > 0$  et  $f : B_r \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction continue par morceau en  $t$  et localement lipschitzienne en  $x$ . Supposons qu'il existe une constante  $\mu$ , trois fonctions  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) de classe  $K$ , définies sur  $[0, r)$ , et une fonction  $V : B_r \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telles que :*

$$0 < \mu < \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x, t) \leq \alpha_2(|x|), \quad \forall x \in B_r \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, t) \leq -\alpha_3(|x|), \quad \forall |x| \leq \mu. \quad (\text{A.10})$$

*Alors, il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$  et un instant fini  $t_1$ , dépendant de  $x(t_0)$  et  $\mu$ , telle que, pour toute solution  $x(t)$  de  $\dot{x} = f(x, t)$ , nous avons :*

$$\left. \begin{aligned} |x(t)| &\leq \beta(|x(t_0)|, t - t_0), \quad \forall t_0 \leq t < t_1 \\ |x(t)| &\leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\mu)), \quad \forall t \geq t_1 \end{aligned} \right\} \quad \forall |x(t_0)| \leq \alpha_2^{-1}(\alpha_1(r)) \quad (\text{A.11})$$

*De plus, si toutes les hypothèses sont vérifiées avec  $r = +\infty$ , i.e.  $B_r = \mathbb{R}^n$ , et  $\alpha_1$  est de classe  $K_\infty$ , alors l'équation (A.11) est vérifiée pour toutes les conditions initiales  $x(t_0)$ . En particulier, si  $\alpha_i(s) = k_i s^c$ , pour  $k_i > 0$  et  $c > 0$ , alors  $\beta(s, t) = ks \exp(-\gamma t)$  avec :*

$$k = \left( \frac{k_2}{k_1} \right)^{1/c}, \quad \gamma = \frac{k_3}{k_2 c}.$$

Aussi, le lecteur intéressé est invité à consulter Khalil [37, Section 4.5] pour le cas où la convergence asymptotique, plutôt que la bornitude ultime, est possible en présence d'incertitudes non évanescents adéquates.

Les deux dernières notions de stabilité que nous allons présenter sont relatives à un système dynamique commandé. Elles décrivent le phénomène de bornitude de la sortie d'un système dynamique commandé chaque fois que l'entrée est bornée. Il est bien connu que ce phénomène est toujours garanti pour tous les systèmes linéaires autonomes ou non-autonomes quand on possède la stabilité asymptotique globale uniforme (UGAS, abréviation en anglais), par contre, ceci ne l'est pas pour les systèmes nonlinéaires (voir [15] et [70, 71] pour des contre-exemples). Plus précisément, nous avons :

**Définition A.5** Le système nonlinéaire commandé  $\dot{x} = f(x, u)$  avec la sortie  $y = h(x)$  est appelé Entrée-Bornée Sortie-Bornée (BIBO, abréviation en anglais) si pour chaque entrée  $u(t)$  définie pour  $t \geq 0$  telle que  $\|u\| \leq \delta_1$  et pour chaque condition initiale  $|x_0| \leq \delta_2$  où  $\delta_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont deux nombres réels positifs, la solution associée  $x(t)$  du système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) , \quad x(t_0) = x_0$$

satisfait la propriété, i.e. :  $\exists \delta(\delta_1, \delta_2) \in (0, +\infty)$ ,

$$|h(x(t))| \leq \delta(\delta_1, \delta_2) \quad \forall t \geq t_0 . \quad (\text{A.12})$$

Si les  $\delta_i$  ( $i = 1, 2$ ) tels que (A.12) est satisfaite ne sont pas arbitraires, alors le système considéré est appelé localement BIBO.

Remarquons que, dans le cas où  $h(x) = x$ , BIBO est aussi appelé Entrée-Bornée Etat-Borné (BIBS, en anglais). Cette notion a été généralisée par Sontag [70, 71] où la bornitude "ultime" des solutions n'est plus dépendante des conditions initiales. Plus précisément, nous avons :

**Définition A.6** [71] Le système  $\dot{x} = f(x, u)$  est appelé entrée-à-état stable (ISS) s'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  telles que pour chaque condition initiale  $x(0)$  et chaque entrée mesurable et essentiellement bornée  $u(t)$  définie sur  $[0, +\infty)$ , la solution associée  $x(t)$  existe pour tout  $t \geq 0$  et satisfait

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) + \gamma(\|u_t\|) . \quad (\text{A.13})$$

Il est intéressant de noter que la propriété ISS du système  $\dot{x} = f(x, u)$  avec  $u$  considérée comme entrée implique la propriété GAS du système  $\dot{x} = f(x, 0)$ . Bien que la réciproque soit fausse, Sontag [71] a démontré que la GAS implique la propriété ISS après un changement approprié de feedback. Plus précisément, considérons le système nonlinéaire :

$$\dot{x} = f(x, u) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (\text{A.14})$$

où  $x$  et  $u$  représentent respectivement l'état et l'entrée du système. S'il existe une matrice  $K(x)$  telle que le système (A.14) en boucle fermée avec  $u = K(x)$  est GAS, alors nous avons :

**Théorème A.3** [71, Theorem 1] Il existe une matrice carrée  $G(x)$  de classe  $C^1$ , inversible pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , telle que le nouveau système obtenu de (A.14) avec  $u = K(x) + G(x)v$  est ISS quand on considère  $v$  comme l'entrée.

Comme référence, nous présentons ici un algorithme pour vérifier si un système est ISS qui a été proposé par Sontag [70, Proof of Theorem 1] et qui semble être la seule méthode systématique disponible jusqu'à présent (voir aussi [45]).

L'algorithme de Sontag relatif à la stabilité ISS :

Cet algorithme, qui existe implicitement dans [70, Proof of Theorem 1] mais explicitement dans Lin [45], consiste à trouver les fonctions  $\beta$  de classe  $KL$ , et  $\gamma$  de classe  $K$  satisfaisant la propriété ISS (A.13) pour les systèmes nonlinéaires ISS stables. Il est fortement dépendant de l'expression explicite d'une fonction de Lyapunov, et donc non complètement constructif. Par contre, il y a beaucoup de systèmes ISS pour lesquels cet algorithme est susceptible de donner des expressions des deux fonctions  $(\beta, \gamma)$ .

Etant donné un système ISS stable :

$$\dot{x} = f(x, u) , \quad x \in \mathbb{R}^n , \quad u \in \mathbb{R}^m . \quad (\text{A.15})$$

En particulier, le système résultant  $\dot{x} = f(x, 0)$  est GAS.

*Etape 1 :* Trouver une fonction de Lyapunov  $V$  et trois fonctions de classe  $K_\infty$  telles que

$$\alpha_1(|x|) \leq V(x) \leq \alpha_2(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.16})$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, 0) \leq -\alpha_3(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.17})$$

*Etape 2 :* Trouver deux fonctions  $\chi$  et  $\alpha_0$  de classe  $K_\infty$  telles que

$$|x| \geq \chi(\|u\|) \implies \dot{V}_{(A.15)}(x) \leq -\alpha_0(V(x)). \quad (\text{A.18})$$

*Etape 3 :* Pour chaque  $s > 0$ , dénotons par  $\eta(s)$  l'intégrale suivante :

$$\eta(s) := - \int_1^s \frac{d\tau}{\alpha_0(\tau)}.$$

Puis pour tous les  $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , définissons

$$\widehat{\beta}_0(s, t) := \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0 \\ 0 & \text{si } t + \eta(s) \geq \lim_{s \rightarrow 0+} \eta(s) \text{ et } s > 0 \\ \eta^{-1}(t + \eta(s)) & \text{si } t + \eta(s) < \lim_{s \rightarrow 0+} \eta(s) \text{ et } s > 0 \end{cases}$$

et

$$\beta_0(s, t) = \widehat{\beta}_0(s, t) + \frac{s}{1+t}.$$

*Etape 4 :* Finalement, les expressions des fonctions  $(\beta, \gamma)$  dans (A.13) peuvent être choisies comme :

$$\beta(s, t) := \alpha_1^{-1}(\beta_0(\alpha_2(s), t)) \quad (\text{A.19})$$

$$\gamma(s) := \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\chi(s))) . \quad (\text{A.20})$$

#### Commentaires :

1– Dans le cas où  $V(x) = \alpha(|x|)$  avec  $\alpha$  une fonction de classe  $K_\infty$ , l'expression de  $\gamma$  dans (A.20) se simplifie en :

$$\gamma(s) := \chi(s). \quad (\text{A.21})$$

2– Les fonctions  $(\beta, \gamma)$  ne sont pas uniques dû au fait que la fonction de Lyapunov  $V$  dans l'étape 1 ainsi que les fonctions  $\chi$  et  $\alpha_0$  dans l'étape 2 ne sont pas uniques. Leur choix dépend souvent du besoin de notre problème (voir [45, Exemple 3.6.1]).





## Annexe B

# Démonstrations liées au Chapitre 1

### B.0 Deux inégalités utiles

Dans cette section, nous démontrons deux inégalités qui vont être utilisées à maintes reprises.

#### 1. Une inégalité de Young : [22]

Quels que soient deux vecteurs  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et deux nombres réels  $\varepsilon > 0$  et  $p > 1$ , nous avons :

$$a^\top b \leq \frac{|a|^p}{p\varepsilon^p} + \frac{(p-1)(\varepsilon|b|)^{\frac{p}{p-1}}}{p} . \quad (\text{B.1})$$

Dans le cas où  $p = 2$ , (B.1) est appelée *inégalité quadratique de Young*.

*Preuve* : L'inégalité (B.1) est une conséquence directe de la concavité du logarithme, ou plus précisément, du fait suivant :

$$\frac{1}{p} \log x + \frac{p-1}{p} \log y \leq \log \left( \frac{1}{p}x + \frac{p-1}{p}y \right) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 . \quad (\text{B.2})$$

#### 2. Une inégalité faible de triangularité :

Quelles que soient une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et une fonction  $\rho$  de classe  $K_\infty$  telle que  $\rho - \text{Id}$  est de classe  $K_\infty$ , et quels que soient deux nombres réels positifs  $a$  et  $b$ , nous avons :

$$\gamma(a+b) \leq \gamma(\rho(a)) + \gamma(\rho \circ (\rho - \text{Id})^{-1}(b)) . \quad (\text{B.3})$$

*Preuve* : Il suffit de considérer respectivement deux cas suivants :

$$b \leq (\rho - \text{Id})(a) \quad \text{et} \quad a \leq (\rho - \text{Id})^{-1}(b) .$$

Remarquons que l'inégalité (B.3) généralise [70, eq. (12)].

## B.1 Démonstration du théorème 1.9

Nous avons besoin du lemme technique suivant.

**Lemme B.1** Soient  $\beta$  une fonction de classe  $KL$  et  $\rho$  une fonction de classe  $K$  telles que  $\text{Id} - \rho$  est de classe  $K_\infty$ . Soit  $z(t)$  une fonction réelle positive, définie sur  $[0, T)$  avec  $T$  un réel strictement positif ou infini. Si, pour un nombre réel positif  $s_0$  et une constante  $\alpha$  dans  $(0, 1]$ , le signal  $z(t)$  satisfait :

$$z(t) \leq \beta(s_0, t) + \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z(\tau)\} \right) \quad \forall t \in [0, T) , \quad (\text{B.4})$$

alors il existe une fonction  $\widehat{\beta}$  de classe  $KL$  telle que :

$$z(t) \leq \widehat{\beta}(s_0, t) \quad \forall t \in [0, T) . \quad (\text{B.5})$$

*Preuve :* On peut supposer que  $\rho$  est de classe  $K_\infty$ . Sinon, considérons  $\bar{\rho} = (\text{Id} + \rho)/2$ . Aussi, on peut supposer que  $T = +\infty$ . Sinon, on prolonge  $z(t)$  par 0 sur  $[T, +\infty)$ . Définissons  $\xi(s)$  par :

$$\xi(s) := \beta(s, 0) + \rho(\xi(s)) \quad \forall s \geq 0 . \quad (\text{B.6})$$

Par hypothèse,  $\xi$  est bien définie sur  $[0, +\infty)$ . Pour chaque  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ , définissons  $z_0(s, t)$  un nombre réel positif par :

$$z_0(s, t) := \xi(s) = (\text{Id} - \rho)^{-1}(\beta(s, 0)) \quad \forall s \geq 0, t \geq 0 . \quad (\text{B.7})$$

Remarquons que (B.4) implique :

$$\sup_{\tau \in [0, t]} \{z(\tau)\} \leq \beta(s_0, t) + \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z(\tau)\} \right)$$

et donc  $z(t) \leq z_0(s_0, t)$ . Alors pour chaque  $(s, t)$  dans  $\mathbb{R}_+^2$ , nous définissons une suite de nombres réels positifs, notée  $\{z_i(s, t)\}_{i \geq 0}$ , selon la récurrence suivante :

$$z_{i+1}(s, t) = \beta(s, t) + \rho(z_i(s, \alpha t)) \quad \forall i \geq 0 . \quad (\text{B.8})$$

Supposons par induction que :

$$\left. \begin{aligned} \beta(s, t) + \rho(z_i(s, \alpha t)) &\leq z_i(s, t) \\ z_i(s_1, t) &< z_i(s_2, t) \quad \forall 0 \leq s_1 < s_2 \\ z_i(s, t_1) &\leq z_i(s, t_2) \quad \forall t_1 \geq t_2 \geq 0 \\ z(t) &\leq z_i(s_0, t) \end{aligned} \right\} \forall s \geq 0, t \geq 0 . \quad (\text{B.9})$$

Avec (B.8), nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} z_{i+1}(s, t) &\leq z_i(s, t) \\ \beta(s, t) + \rho(z_{i+1}(s, \alpha t)) &\leq \beta(s, t) + \rho(z_i(s, \alpha t)) := z_{i+1}(s, t) \\ z_{i+1}(s_1, t) &< z_{i+1}(s_2, t) \quad \forall 0 \leq s_1 < s_2 \\ z_{i+1}(s, t_1) &\leq z_{i+1}(s, t_2) \quad \forall t_1 \geq t_2 \geq 0 \\ z(t) &\leq \beta(s_0, t) + \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z_i(s_0, \tau)\} \right) := z_{i+1}(s_0, t) \end{aligned} \right\} \forall s \geq 0, t \geq 0 . \quad (\text{B.10})$$

(B.10) implique immédiatement que (B.9) est aussi satisfaite par  $z_{i+1}$ . Puisque, vu la définition de  $z_0$  dans (B.7)-(B.6),  $z_0$  satisfait (B.9), (B.9) est valide pour *tous les*  $i \geq 0$ . Par conséquent, pour chaque  $(s, t)$  dans  $\mathbb{R}_+^2$ , la suite  $\{z_i(s, t)\}_{i \geq 0}$  des nombres réels positifs est décroissante et donc converge vers un nombre réel fini. Dénotons cette limite par  $\bar{z}(s, t)$  :

$$\bar{z}(s, t) := \lim_{i \rightarrow +\infty} z_i(s, t) . \quad (\text{B.11})$$

En plus de la propriété (B.9) satisfaite par la suite  $\{z_i(s, t)\}_{i \geq 0}$ , notons d'autres propriétés pour cette suite : pour tous les  $i \geq 0$ ,  $s \geq 0$  et  $t \geq 0$ ,

$$z_i(0, t) = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i(s, t) = \rho \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} z_{i-1}(s, t) \right) = \rho^i \circ (\text{Id} - \rho)^{-1} \circ \beta(s, 0) \quad (\text{B.13})$$

$$z_i(s, t) \leq (\text{Id} - \rho)^{-1} \circ \beta(s, 0) . \quad (\text{B.14})$$

Si bien que, la fonction  $\bar{z}$  possède les propriétés suivantes :

(P1) pour chaque  $t \geq 0$  fixé, la fonction  $\bar{z}(s, t)$  est croissante en  $s$ , et pour chaque  $s \geq 0$  fixé, la fonction  $\bar{z}(s, t)$  est décroissante en  $t$ .

(P2) Pour tout  $t \geq 0$ ,  $\bar{z}(0, t) = 0$ , et pour chaque  $s \geq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{z}(s, t) = 0 . \quad (\text{B.15})$$

(P3)  $\bar{z}(s, 0)$  est continue en  $s$ .

(B.15) vient du fait que, pour *tout*  $s \geq 0$ ,  $\rho^i(s)$  tend vers zéro lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$ . Pour démontrer ce dernier,  $\rho$  et  $\text{Id} - \rho$  étant de classe  $K_\infty$ , la suite  $\{\rho^i(s)\}_{i \geq 0}$  est positive et strictement décroissante. Soit  $l_s$  la limite associée à  $s \geq 0$ . Comme  $\rho^{i+1}(s) = \rho(\rho^i(s))$ , en faisant  $i$  tendre vers  $+\infty$ , on obtient que  $l_s = \rho(l_s)$ , ce qui entraîne que  $l_s = 0 \forall s \geq 0$ . Pour démontrer (P3), il suffit de remarquer à partir de (B.7) et (B.8) que :

$$\bar{z}(s, 0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} z_i(s, 0) = (\text{Id} - \rho)^{-1}(\beta(s, 0)) . \quad (\text{B.16})$$

Si, de plus, pour chaque  $t$  fixé, la fonction  $\bar{z}(s, t)$  était strictement croissante et continue en  $s$ , alors  $\bar{z}(s, t)$  serait de classe  $KL$ . Mais il est difficile de montrer directement la continuité de  $\bar{z}(\cdot, t)$ . Pour contourner cette difficulté, nous allons construire une fonction  $\hat{\beta}$  de classe  $KL$  telle que :

$$\hat{\beta}(s, t) \geq \bar{z}(s, t) \quad \forall s \geq 0, t \geq 0 . \quad (\text{B.17})$$

A partir de nos analyses précédentes, cette fonction  $\hat{\beta}$  est une solution pour (B.5).

Pour chaque  $\lambda > 0$  fixé, définissons une fonction  $\beta_1$  par :  $\forall s \geq 0, t \geq 0$ ,

$$\beta_1(s, t) = \begin{cases} \min\{\bar{z}(\lambda, t), \bar{z}(s, 0)\} & \text{si } s \in [0, \lambda] \\ \bar{z}(s, t) & \text{si } s \in (\lambda, \infty) . \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Comme il peut être directement vérifié,  $\beta_1$  satisfait :

(C1) Pour tous les  $s \geq 0$  et  $t \geq 0$ ,  $\beta_1(s, t) \geq \bar{z}(s, t)$ .

(C2) Pour tous les  $t \geq 0$ ,  $\beta_1(0, t) = 0$ .

(C3) Pour chaque  $s > 0$  fixé,  $\beta_1(s, t)$  est décroissante en  $t$  et tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

(C4) Pour chaque  $t \geq 0$  fixé,  $\beta_1(s, t)$  est croissante en  $s$ .

(C5) Pour chaque  $t \geq 0$  fixé,  $\beta_1(s, t)$  est continue sur  $[0, \lambda]$ .

En effet, pour (C1), (P1) implique que pour  $s \in [0, \lambda]$ ,  $\bar{z}(s, t) \leq \bar{z}(s, 0)$  et  $\bar{z}(s, t) \leq \bar{z}(\lambda, t)$ . Pour (C2),  $s = 0$  entraîne que  $s \in [0, \lambda]$  et, d'après (P2),  $\bar{z}(0, 0) = 0$ . Pour (C3) et (C4), si  $s > \lambda$ , on a (P1) et (P2); si  $s \in (0, \lambda]$ , il existe un  $t_0 \geq 0$  tel que  $\beta_1(s, t) = \bar{z}(s, 0)$  pour  $t \leq t_0$ , et  $\beta_1(s, t) = \bar{z}(\lambda, t)$  pour  $t > t_0$ . La propriété (C5) est entraînée par la propriété (P3), puisque  $\beta_1(s, 0) = \bar{z}(\lambda, 0)$ .

Maintenant, nous sommes prêts à construire la fonction  $\hat{\beta}$ . Introduisons d'abord une nouvelle fonction  $\beta_2 : \forall s \geq 0, t \geq 0$ ,

$$\beta_2(s, t) = \begin{cases} \beta_1(s, t) & \text{si } s \in [0, \lambda/2] \\ \kappa(s, t) & \text{si } s \in [\lambda/2, \lambda] \\ \int_s^{s+1} \beta_1(\tau, t) d\tau & \text{si } s \in [\lambda, +\infty) \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

où  $\kappa(s, t)$  est défini sur  $[\lambda/2, \lambda] \times \mathbb{R}_+$  :

$$\kappa(s, t) := \frac{2s}{\lambda} \left( \int_{\lambda}^{\lambda+1} \beta_1(\tau, t) d\tau - \beta_1(\lambda/2, t) \right) + 2\beta_1(\lambda/2, t) - \int_{\lambda}^{\lambda+1} \beta_1(\tau, t) d\tau.$$

Ceci implique en particulier que  $\beta_1(\cdot, t)$  est linéaire sur l'intervalle  $[\lambda/2, \lambda]$ .

D'après sa définition dans (B.19), la fonction  $\beta_2$  domine  $\beta_1$  définie dans (B.18). Notamment, à l'aide de (C1)-(C5),  $\beta_2$  possède aussi les propriétés (C1)-(C4) et :

(C6) Pour chaque  $t \geq 0$  fixé, la fonction  $\beta_2(\cdot, t)$  est continue sur  $[0, +\infty)$ .

En effet, vus (B.19) et (C5),  $\beta_2(\cdot, t)$  est continue sur  $[0, \lambda]$ . Si  $s \geq \lambda$ ,  $\beta_2(s, t) = \int_s^{s+1} \beta_1(\tau, t) d\tau$  et donc il reste à démontrer la continuité de  $\int_s^{s+1} \beta_1(\tau, t) d\tau$  en  $s$ . Pour ce faire, considérons une suite arbitraire  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  de nombres réels positifs telle que  $s_n$  tend vers  $s$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Notons que :

$$\int_{s_n}^{s_n+1} \beta_1(\tau, t) d\tau = \int_0^{\infty} \beta_1(\tau, t) \chi_{[s_n, s_n+1]}(\tau) d\tau, \quad \int_s^{s+1} \beta_1(\tau, t) d\tau = \int_0^{\infty} \beta_1(\tau, t) \chi_{[s, s+1]}(\tau) d\tau$$

où  $\chi_{[s_n, s_n+1]}$  (resp.  $\chi_{[s, s+1]}$ ) est la fonction caractéristique sur  $[s_n, s_n+1]$  (resp.  $[s, s+1]$ ). Comme  $\beta_1(\tau, t) \chi_{[s_n, s_n+1]}(\tau)$  converge vers  $\beta_1(\tau, t) \chi_{[s, s+1]}(\tau)$  presque partout en  $\tau \in \mathbb{R}_+$ . Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure.

Finalement, la fonction  $\hat{\beta}$ , de classe  $KL$ , est donnée par :

$$\hat{\beta}(s, t) = \beta_2(s, t) + \frac{s}{1+t}. \quad (\text{B.20})$$

□

**Remarque B.1** Il est important de noter que, bien que  $\hat{\beta}(s, t)$  ne soit pas disponible dans la pratique, la fonction  $\hat{\beta}(s, 0)$  est complètement connue. En effet, vus (B.18) et (B.16), nous avons :

$$\beta_1(s, 0) = (\text{Id} - \rho)^{-1}(\beta(s, 0)). \quad (\text{B.21})$$

En conséquence, avec (B.21), (B.19) et (B.20), nous obtenons une expression *explicite* pour  $\hat{\beta}(s, 0)$ . □

**Remarque B.2** A partir du Lemme B.1, nous pouvons facilement obtenir la généralisation suivante :

Si, au lieu de (B.4), nous avons :

$$z(t) \leq \beta(s_0, t) + \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z(\tau)\} \right) + d \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{B.22})$$

où  $d$  est un nombre réel strictement positif, alors pour chaque  $k > 1$ , il existe une fonction  $\hat{\beta}$  de classe  $KL$  telle que :

$$z(t) \leq \hat{\beta}(s_0, t) + (\text{Id} - \rho)^{-1}(kd) \quad \forall t \in [0, T] . \quad (\text{B.23})$$

En effet, comme là-dessus, on peut supposer que  $T = +\infty$ . Puisque  $d > 0$  et  $\beta$  est une fonction de classe  $KL$ , si  $\beta(s_0, 0) \leq (k-1)d$ ,  $\beta(s_0, t) \leq (k-1)d$  pour tout  $t \geq 0$  et (B.22) donne :

$$z(t) \leq \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z(\tau)\} \right) + kd \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.24})$$

Avec (B.24), nous obtenons :

$$z(t) \leq (\text{Id} - \rho)^{-1}(kd) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.25})$$

Si  $\beta(s_0, 0) > (k-1)d$ , il existe un instant  $t^*$  dans  $(0, +\infty)$  tel que  $\beta(s_0, t) \geq (k-1)d$  pour  $t \in [0, t^*)$ , et  $\beta(s_0, t) \leq (k-1)d$  pour  $t \in [t^*, +\infty)$ . Dans ce cas, (B.22) entraîne :

$$z(t) \leq \frac{k}{k-1} \beta(s_0, t) + \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z(\tau)\} \right) \quad \forall t \in [0, t^*) \quad (\text{B.26})$$

et :

$$z(t) \leq \rho \left( \sup_{\tau \in [\alpha t, t]} \{z(\tau)\} \right) + kd \quad \forall t \in [t^*, +\infty) . \quad (\text{B.27})$$

En appliquant le Lemme B.1 à (B.26), nous trouvons une fonction  $\hat{\beta}$  de classe  $KL$  telle que :

$$z(t) \leq \hat{\beta}(s_0, t) \quad \forall t \in [0, t^*) . \quad (\text{B.28})$$

D'autre part, (B.27) implique :

$$z(t) \leq (\text{Id} - \rho)^{-1}(kd) \quad \forall t \in [t^*, +\infty) . \quad (\text{B.29})$$

Vus (B.25), (B.28) et (B.29), nous concluons (B.23).  $\square$

### Preuve du théorème 1.9 :

Selon [47, Fact 2 (N1)], nous pouvons supposer que la fonction  $\rho_2$  de classe  $K_\infty$  dans (1.41) est telle que  $\text{Id} - \rho_2$  est aussi de classe  $K_\infty$ .

**1. Bornitude des solutions.** Quelles que soient  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  deux fonctions continues et bornées sur  $[0, +\infty)$ , par hypothèse de régularité, pour chaque condition initiale  $(x_1(0), x_2(0))$ ,

il existe une seule solution  $(x_1(t), x_2(t))$  de (1.36)-(1.37) maximale définie sur  $[0, T]$  avec  $T > 0$ . Puisque (1.36) et (1.37) admettent la propriété SpES, cette solution satisfait :

$$|y_1(t)| \leq \beta_1(|x_1(0)|, t) + \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [0, t]} |(u_1(\tau), y_2(\tau))^\top| \right) + d_1 \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{B.30})$$

$$|y_2(t)| \leq \beta_2(|x_2(0)|, t) + \gamma_2 \left( \sup_{\tau \in [0, t]} |(u_2(\tau), y_1(\tau))^\top| \right) + d_2 \quad \forall t \in [0, T] \quad (\text{B.31})$$

Choisissons un  $T_0$  quelconque dans  $[0, T]$  et rappelons que  $y_{iT_0}$  représente la fonction tronquée de  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ) à l'instant  $T_0$ . Nous avons :

$$\|y_{1T_0}\| \leq \gamma_1 (\|u_1\| + \|y_{2T_0}\|) + \beta_1(|x_1(0)|, 0) + d_1, \quad (\text{B.32})$$

$$\|y_{2T_0}\| \leq \gamma_2 (\|u_2\| + \|y_{1T_0}\|) + \beta_2(|x_2(0)|, 0) + d_2. \quad (\text{B.33})$$

Notons que les équations (B.32) et (B.33) ne sont rien d'autre que [47, eqs. (15a)-(15b)]. D'après Mareels et Hill [47, Proof of Theorem 2], vu (1.41), il existe une fonction  $\gamma$  de classe  $K_\infty$  telle que :

$$\|y_{1T_0}\| + \|y_{2T_0}\| \leq \gamma(|x_1(0)|, |x_2(0)|, \|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3)^\top). \quad (\text{B.34})$$

Puisque  $T_0$  est arbitraire et le membre de droite de (B.34) est indépendant de  $T_0$ , (B.34) implique la bornitude de  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sur  $[0, T]$ , i.e. :

$$|y_1(t)| + |y_2(t)| \leq \gamma(|x_1(0)|, |x_2(0)|, \|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3)^\top) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (\text{B.35})$$

Vu le fait que les sous systèmes  $x_1$  et  $x_2$  satisfont la propriété ONB, nous concluons que  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont bornées sur  $[0, T]$ . On en déduit que  $T = +\infty$  et que les solutions sont bornées sur  $[0, +\infty)$ .

**2. Convergence des sorties.** Nous considérons maintenant le cas où  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$  et  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ . Comme nous l'avons démontré précédemment,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont bornées sur  $[0, +\infty)$ . D'après la première partie de la preuve, soit  $s_0$  un nombre réel strictement positif tel que :

$$|x_1(t)| \leq s_0, \quad |x_2(t)| \leq s_0 \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{B.36})$$

Dans la suite, nous nous proposons de trouver une fonction  $\beta_0$  de classe  $KL$  telle que :

$$|y_1(t)| + |y_2(t)| \leq \beta_0(s_0, t) \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{B.37})$$

Puisque le système (1.36)-(1.37) avec  $(u_1, u_2) = 0$  est autonome, la propriété (B.30)-(B.31) est vérifiée pour n'importe quel instant initial  $t_0 \geq 0$ , i.e. :

$$|y_1(t)| \leq \beta_1(|x_1(t_0)|, t - t_0) + \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [t_0, t]} |y_2(\tau)| \right) \quad \forall t_0 \leq t \quad (\text{B.38})$$

$$|y_2(t)| \leq \beta_2(|x_2(t_0)|, t - t_0) + \gamma_2 \left( \sup_{\tau \in [t_0, t]} |y_1(\tau)| \right) \quad \forall t_0 \leq t. \quad (\text{B.39})$$

Pour chaque quadruplet de temps  $(s_1, s_2, \tau, t)$  tels que :

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \tau \leq t < +\infty,$$

en substituant (B.38) avec  $(t_0, t) = (s_1, \tau)$  dans (B.39) avec  $(t_0, t) = (s_2, t)$ , et puis en mettant  $s_1 = t/4$ ,  $s_2 = t/2$ , il résulte que, pour chaque  $t \geq 0$  :

$$|y_2(t)| \leq \beta_2(|x_2(t/2)|, t/2) + \gamma_2 \left( \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [t/4, t]} |y_2(\tau)| \right) + \beta_1(|x_1(t/4)|, t/4) \right) \quad (\text{B.40})$$

Puis, une application directe de l'inégalité triangulaire faible (B.3) avec  $\rho = \text{Id} + \rho_1$  au dernier terme de (B.40) donne :

$$\begin{aligned} & \gamma_2 \left( \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [t/4, t]} |y_2(\tau)| \right) + \beta_1(|x_1(t/4)|, t/4) \right) \\ & \leq \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [t/4, t]} |y_2(\tau)| \right) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1^{-1})(\beta_1(|x_1(t/4)|, t/4)) . \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Dû à (1.41), (B.41) et (B.40) impliquent :

$$\begin{aligned} |y_2(t)| & \leq (\text{Id} - \rho_2) \left( \sup_{\tau \in [t/4, t]} |y_2(\tau)| \right) \\ & \quad + \beta_2(|x_2(t/2)|, t/2) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1^{-1})(\beta_1(|x_1(t/4)|, t/4)) \quad \forall t \geq 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Vus (B.36) et (B.42), nous avons :

$$\begin{aligned} |y_2(t)| & \leq (\text{Id} - \rho_2) \left( \sup_{\tau \in [t/4, t]} |y_2(\tau)| \right) \\ & \quad + [\beta_2(s_0, t/2) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1^{-1})(\beta_1(s_0, t/4))] \quad \forall t \geq 0 . \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

Notons que les termes dans le crochet de (B.43) sont deux fonctions de classe  $KL$  par rapport à  $(s_0, t)$ . En appliquant le Lemme B.1 à (B.43) avec  $\alpha = 1/4$  et  $\rho = (\text{Id} - \rho_2)$ , nous trouvons une fonction  $\widehat{\beta}_0$  de classe  $KL$  telle que :

$$|y_2(t)| \leq \widehat{\beta}_0(s_0, t) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.44})$$

En substituant (B.44) dans (B.38) avec  $t_0 = t/2$ , nous démontrons que  $y_1(t)$  satisfait une équation similaire à (B.44). Finalement, (B.37) est démontré.

**3. Stabilité.** Dans ce cas, nous avons  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$  et la propriété OFNB pour les sous systèmes  $x_1$  et  $x_2$  de (1.36)-(1.37) avec  $(u_1, u_2) = 0$ . C'est-à-dire, il existe deux fonctions  $\beta_{x_1}$ ,  $\beta_{x_2}$  de classe  $KL$  et deux fonctions  $\gamma_{x_1}$ ,  $\gamma_{x_2}$  de classe  $K$  telles que la solution  $(x_1(t), x_2(t))$  de (1.36)-(1.37) satisfait :

$$|x_1(t)| \leq \beta_{x_1}(|x_1(0)|, t) + \gamma_{x_1} \left( \sup_{\tau \in [0, t]} |(y_2(\tau), y_1(\tau))| \right) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{B.45})$$

$$|x_2(t)| \leq \beta_{x_2}(|x_2(0)|, t) + \gamma_{x_2} \left( \sup_{\tau \in [0, t]} |(y_1(\tau), y_2(\tau))| \right) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.46})$$

Notons que (B.35) implique :

$$|y_1(t)| + |y_2(t)| \leq \gamma(|(|x_1(0)|, |x_2(0)|)^\top|) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.47})$$

En substituant (B.47) dans (B.45) et (B.46), (B.36) est satisfaite avec  $s_0$  défini par :

$$s_0 := \gamma_0(|(|x_1(0)|, |x_2(0)|)^\top|) \quad (\text{B.48})$$

où  $\gamma_0$ , de classe  $K$ , est donnée par :

$$\gamma_0(s) = \beta_{x_1}(s, 0) + \beta_{x_2}(s, 0) + \gamma_{x_1}(\gamma(s)) + \gamma_{x_2}(\gamma(s)) .$$

Selon (B.37) avec  $s_0$  remplacé par (B.48), nous en déduisons une fonction  $\bar{\beta}_0$  de classe  $KL$  telle que :

$$|y_1(t)| + |y_2(t)| \leq \bar{\beta}_0(|(|x_1(0)|, |x_2(0)|)^\top|, t) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.49})$$

Nous sommes prêts à démontrer la propriété GAS. Dû à la stationnarité de (1.36)-(1.37) avec  $(u_1, u_2) = 0$ , la propriété (B.45)-(B.46) est vérifiée pour n'importe quel instant initial  $t_0 \geq 0$ , i.e. :  $\forall 0 \leq t_0 \leq t < +\infty$ ,

$$|x_1(t)| \leq \beta_{x_1}(|x_1(t_0)|, t - t_0) + \gamma_{x_1} \left( \sup_{\tau \in [t_0, t]} |(y_2(\tau), y_1(\tau))| \right) , \quad (\text{B.50})$$

$$|x_2(t)| \leq \beta_{x_2}(|x_2(t_0)|, t - t_0) + \gamma_{x_2} \left( \sup_{\tau \in [t_0, t]} |(y_1(\tau), y_2(\tau))| \right) . \quad (\text{B.51})$$

En substituant  $|(y_2(\tau), y_1(\tau))|$  dans (B.50) avec  $t_0 = t/2$  par la borne de (B.49), et  $|x_i(t/2)|$  ( $i = 1, 2$ ) par leur borne supérieure  $s_0$  définie dans (B.48), nous avons :

$$|x_1(t)| \leq \beta_{x_1}(s_0, t/2) + \gamma_{x_1}(\bar{\beta}_0(s_0, t/2)) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.52})$$

D'après la définition de  $s_0$  dans (B.48), il en résulte une fonction  $\hat{\beta}_{x_1}$  de classe  $KL$  définie par :

$$\hat{\beta}_{x_1}(s, t) := \beta_{x_1}(\gamma_0(s), t) + \gamma_{x_1}(\bar{\beta}_0(s, t)) \quad \forall s \geq 0, t \geq 0$$

telle que :

$$|x_1(t)| \leq \hat{\beta}_{x_1}(|(|x_1(0)|, |x_2(0)|)^\top|, t) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.53})$$

De la même manière, il existe une fonction  $\hat{\beta}_{x_2}$  de classe  $KL$  telle que :

$$|x_2(t)| \leq \hat{\beta}_{x_2}(|(|x_1(0)|, |x_2(0)|)^\top|, t) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.54})$$

En additionnant (B.53), (B.54), nous avons :

$$\left| \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \right| \leq (\hat{\beta}_{x_1} + \hat{\beta}_{x_2}) \left( \left| \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} \right|, t \right) \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{B.55})$$

La propriété GAS est finalement démontrée.



## B.2 Démonstration du théorème 1.10

**Lemme B.2** Soit  $\rho$  une fonction de classe  $K_\infty$  telle que  $\text{Id} - \rho$  est de classe  $K_\infty$ . Alors :  
 1- il existe deux fonctions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de classe  $K_\infty$  telles que  $\text{Id} - \rho_1$  et  $\text{Id} - \rho_2$  sont de classe  $K_\infty$  et :

$$\rho(s) = \rho_1 \circ \rho_2(s) \quad \forall s \geq 0. \quad (\text{B.56})$$

2-  $\rho^{-1}$  et  $\rho^{-1} - \text{Id}$  sont de classe  $K_\infty$ .

*Preuve :* Définissons deux fonctions  $\rho_1$  et  $\rho_2$  par :

$$\rho_1 = \rho \circ \left( \frac{\text{Id} + \rho}{2} \right)^{-1}, \quad \rho_2 = \frac{\text{Id} + \rho}{2}. \quad (\text{B.57})$$

Puisque  $\rho$  est de classe  $K_\infty$ ,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont bien définies et sont de classe  $K_\infty$ . De plus, comme  $\text{Id} - \rho$  est de classe  $K_\infty$ , nous avons :

$$\text{Id} - \rho_1 = \left( \frac{\text{Id} - \rho}{2} \right) \circ \left( \frac{\text{Id} + \rho}{2} \right)^{-1}, \quad \text{Id} - \rho_2 = \frac{\text{Id} - \rho}{2}.$$

On en déduit donc que  $\text{Id} - \rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) sont de classe  $K_\infty$ .

Le point 2 du lemme B.2 est direct en remarquant que

$$\rho^{-1} - \text{Id} = (\text{Id} - \rho) \circ \rho^{-1}.$$

□

*Preuve du théorème 1.10 :*

**1. Bornitude des solutions.** Soient  $u_1(\cdot)$  et  $u_2(\cdot)$  deux signaux mesurables et essentiellement bornés sur  $[0, +\infty)$ . Par hypothèse de régularité, pour chaque condition initiale  $(x(0), z(0))$ , il existe une solution unique  $(x(t), z(t))$  du système (1.46) définie sur l'intervalle maximal de temps positif, noté  $[0, T)$  avec  $T$  dans  $(0, +\infty]$ . Choisissons un  $T'$  arbitraire dans  $(0, T)$ . Par la propriété d'ISpS, pour chaque couple de temps  $(s, t)$  tels que :

$$0 \leq s \leq t \leq T', \quad (\text{B.58})$$

nous avons :

$$|x(t)| \leq \beta_1(|x(s)|, t-s) + \gamma_1 \left( \| (z_{[s,t]}, u_{1[s,t]})^\top \| \right) + d_1 \quad (\text{B.59})$$

$$|z(t)| \leq \beta_2(|z(s)|, t-s) + \gamma_2 \left( \| (x_{[s,t]}, u_{2[s,t]})^\top \| \right) + d_2. \quad (\text{B.60})$$

En principe, à partir de (B.59) et (B.60), la bornitude vient directement du théorème 1.9 avec  $y_1 = x$  et  $y_2 = z$ . Mais afin de donner des bornes explicites pour  $x(t)$  et  $z(t)$  et faciliter la preuve de la propriété d'ISpS, nous allons présenter dans la suite une démonstration qui est différente de celle de Mareels-Hill [47].

En substituant (B.59) dans (B.60) avec  $s = 0$ , nous obtenons, pour chaque  $0 \leq t \leq T'$ ,

$$|z(t)| \leq \beta_2(|z(0)|, t) + \gamma_2(\beta_1(|x(0)|, 0) + \gamma_1(\|z_t\| + \|u_1\|) + d_1 + \|u_2\|) + d_2. \quad (\text{B.61})$$

En particulier, il implique :

$$\|z_t\| \leq \beta_2(|z(0)|, 0) + d_2 + \gamma_2(\beta_1(|x(0)|, 0) + \gamma_1(\|z_t\| + \|u_1\|) + d_1 + \|u_2\|). \quad (\text{B.62})$$

D'après le Lemme B.2, il existe  $\rho_{2,1}$  et  $\rho_{2,2}$  de classe  $K_\infty$  telles que  $\text{Id} - \rho_{2,1}$  et  $\text{Id} - \rho_{2,2}$  sont de classe  $K_\infty$  et :

$$\text{Id} - \rho_2 = \rho_{2,1} \circ \rho_{2,2} . \quad (\text{B.63})$$

En utilisant (B.3) d'abord avec :

$$\rho = \rho_{2,2}^{-1} \quad (\text{B.64})$$

et puis avec :

$$\rho = \text{Id} + \rho_1 , \quad (\text{B.65})$$

on en déduit que :

$$\gamma_1(\|z_t\| + \|u_1\|) \leq \gamma_1 \circ \rho_{2,2}^{-1}(\|z_t\|) + \gamma_1 \circ (\text{Id} - \rho_{2,2})^{-1}(\|u_1\|) \quad (\text{B.66})$$

et, pour deux nombres réels positifs arbitraires  $k$  et  $a$ ,

$$\gamma_2\left(\gamma_1 \circ \rho_{2,2}^{-1}(a) + k\right) \leq \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \gamma_1 \circ \rho_{2,2}^{-1}(a) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1}(k) . \quad (\text{B.67})$$

En définissant  $k_0$  par :

$$k_0 := \beta_1(|x(0)|, 0) + d_1 + \|u_2\| + \gamma_1 \circ (\text{Id} - \rho_{2,2})^{-1}(\|u_1\|) , \quad (\text{B.68})$$

à partir de (B.66), (B.67), (1.47) et (B.63), on obtient la borne suivante pour le troisième terme dans le côté droit de (B.62) :

$$\begin{aligned} & \gamma_2(\beta_1(|x(0)|, 0) + \gamma_1(\|z_t\| + \|u_1\|) + d_1 + \|u_2\|) \\ & \leq \rho_{2,1}(\|z_t\|) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1}(k_0) + d_3 . \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

En substituant (B.69) dans (B.62), nous concluons que, pour chaque  $t$  dans  $[0, T']$ , nous avons :

$$\|z_t\| \leq (\text{Id} - \rho_{2,1})^{-1}(\beta_2(|z(0)|, 0) + d_2 + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1}(k_0) + d_3) . \quad (\text{B.70})$$

Puisque la borne supérieure de (B.70) dépend seulement de  $|x(0)|$ ,  $|z(0)|$ ,  $\|u_1\|$  et de  $\|u_2\|$ , et puisque  $T'$  est arbitraire, on finit par démontrer que  $z(\cdot)$  est bornée sur  $[0, T)$ .

Introduisons les notations compactes suivantes, pour tous les  $(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}_+^5$ ,

$$\begin{aligned} \chi_2(s_1, s_2) &:= (\text{Id} - \rho_{2,1})^{-1} (2\beta_2(s_2, 0) + 2\gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1}(2\beta_1(s_1, 0))) , \\ k_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) &:= (\text{Id} - \rho_{2,1})^{-1} [2d_2 + 2d_3 + 2\gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1} \\ & \quad (2d_1 + 2s_2 + 2\gamma_1 \circ (\text{Id} - \rho_{2,2})^{-1}(s_1))] , \\ \omega_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) &:= k_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) - k_2(0, 0, d_1, d_2, d_3) , \\ D_2(d_1, d_2, d_3) &:= k_2(0, 0, d_1, d_2, d_3) . \end{aligned}$$

Notons que pour chaque  $(d_1, d_2, d_3)$  dans  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\chi_2(s, s)$ ,  $\omega_2(s, s, d_1, d_2, d_3)$  et  $D_2(s, s, s)$  sont de classe  $K$ . Alors, à l'aide de (B.3) avec  $\rho = 2\text{Id}$ , (B.70) se réécrit comme :

$$|z(t)| \leq \chi_2(|x(0)|, |z(0)|) + \omega_2(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3) + D_2(d_1, d_2, d_3) . \quad (\text{B.71})$$

Rappelons que  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  dans (B.71) sont données par les hypothèses de notre théorème 1.10.

Dans le but d'établir la propriété ISpS, introduisons quelques autres notations compactes :

$$\forall (s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}_+^5,$$

$$\chi_1(s_1, s_2) := \beta_1(s_1, 0) + \gamma_1(2\chi_2(s_1, s_2)) \quad (\text{B.72})$$

$$k_1(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) := \gamma_1(2k_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) + 2s_1) + d_1 \quad (\text{B.73})$$

$$\omega_1(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) := k_1(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) - k_1(0, 0, d_1, d_2, d_3) \quad (\text{B.74})$$

$$D_1(d_1, d_2, d_3) := k_1(0, 0, d_1, d_2, d_3). \quad (\text{B.75})$$

Notons que pour chaque  $(d_1, d_2, d_3)$  dans  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\chi_1(s, s)$ ,  $\omega_1(s, s, d_1, d_2, d_3)$  et  $D_1(s, s, s)$  sont de classe  $K$ . En substituant (B.71) dans (B.59) avec  $s = 0$ , on obtient, pour tous les  $t \in [0, T']$ ,

$$|x(t)| \leq \chi_1(|x(0)|, |z(0)|) + \omega_1(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3) + D_1(d_1, d_2, d_3) \quad (\text{B.76})$$

où  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  sont données par hypothèse. Parce que la borne supérieure de (B.76) dépend seulement de  $(|x(0)|, |z(0)|, \|u_1\|, \|u_2\|)$ , et que  $T'$  est arbitraire, on a montré que  $x(\cdot)$  est bornée sur  $[0, T)$ . Par contradiction, on peut démontrer que  $T$  ne peut pas être fini. En conséquence, (B.71) et (B.76) existent pour tous les  $t \geq 0$ .

**2. La propriété ISpS.** Nous devons démontrer l'existence d'une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une fonction  $\gamma$  de classe  $K$ , et une constante positive  $d$  telles que :

$$\left| \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right| \leq \beta \left( \left| \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \right|, t \right) + \gamma \left( \left\| \begin{pmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{pmatrix} \right\| \right) + d \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{B.77})$$

Pour chaque quadruplet de temps  $(s_1, s_2, \tau, t)$  tels que :

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \tau \leq t < +\infty, \quad (\text{B.78})$$

en substituant (B.59) avec  $(s, t) = (s_1, \tau)$  dans (B.60) avec  $(s, t) = (s_2, t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \beta_2(|z(s_2)|, t - s_2) + d_2 \\ &+ \gamma_2 \left[ \|u_2\| + d_1 + \beta_1(|x(s_1)|, s_2 - s_1) + \gamma_1 \left( \|u_1\| + \sup_{\tau \in [s_1, t]} \{|z(\tau)|\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

Remarquons qu'en particulier, (B.78) existe avec :

$$s_1 = \frac{t}{4}, \quad s_2 = \frac{t}{2}. \quad (\text{B.80})$$

Alors pour tous les  $t \geq 0$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq \beta_2(|z(t/2)|, t/2) + d_2 \\ &+ \gamma_2 \left[ \|u_2\| + d_1 + \beta_1(|x(t/4)|, t/4) + \gamma_1 \left( \|u_1\| + \sup_{\tau \in [t/4, t]} \{|z(\tau)|\} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.81})$$

Selon les mêmes arguments dans les étapes de (B.62) à (B.70), (B.81) implique, pour tous les  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |z(t)| &- \rho_{2,1} \left( \sup_{\tau \in [t/4, t]} \{|z(\tau)|\} \right) \\ &\leq \beta_2(|z(t/2)|, t/2) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1} (2\beta_1(|x(t/4)|, t/4)) \\ &+ d_2 + d_3 + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1} (2d_1 + 2\|u_2\| + 2\gamma_1 \circ (\text{Id} - \rho_{2,2})^{-1}(\|u_1\|)) . \end{aligned} \quad (\text{B.82})$$

Définissons  $s_0$  et  $\bar{\beta}_2$  par :

$$s_0 = \frac{1}{2} |(|x(0)|, |z(0)|, \|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3)^\top|, \quad (\text{B.83})$$

$$\begin{aligned} \bar{\beta}_2(s, t) &= \beta_2(\chi_2(s, s) + \omega_2(s, s, d_1, d_2, d_3) + D_2(s, s, s), t/2) \\ &\quad + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1}(2\beta_1(\chi_1(s, s) + \omega_1(s, s, d_1, d_2, d_3) + D_1(s, s, s), t/4)) \end{aligned} \quad (\text{B.84})$$

A l'aide de (B.71) et (B.76), nous avons, pour tous les  $t \geq 0$ ,

$$\beta_2(|z(t/2)|, t/2) + \gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1}(2\beta_1(|x(t/4)|, t/4)) \leq \bar{\beta}_2(s_0, t). \quad (\text{B.85})$$

Alors, en appliquant le Lemme B.1, ou précisément la Remarque B.2 avec  $k = 2$  à (B.85), on obtient une fonction  $\hat{\beta}_2$  de classe  $KL$  et une fonction positive  $\tilde{k}_2$  telles que :

$$|z(t)| \leq \hat{\beta}_2(s_0, t) + \tilde{k}_2(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3) \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{B.86})$$

Comme référence,  $\tilde{k}_2$  est définie par :

$$\begin{aligned} \tilde{k}_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) &= (\text{Id} - \rho_{2,1})^{-1} [2d_2 + 2d_3 \\ &\quad + 2\gamma_2 \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1} (2d_1 + 2s_2 + 2\gamma_1 \circ (\text{Id} - \rho_{2,2})^{-1}(s_1))] \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

où  $(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}_+^5$ .

Introduisons les notations suivantes,  $\forall (s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}_+^5$ ,

$$\hat{k}_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) := \hat{\beta}_2(|(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3)^\top|, 0) + \tilde{k}_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) \quad (\text{B.88})$$

$$\varpi_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) := \hat{k}_2(s_1, s_2, d_1, d_2, d_3) - \hat{k}_2(0, 0, d_1, d_2, d_3) \quad (\text{B.89})$$

$$\hat{D}_2(d_1, d_2, d_3) := \hat{k}_2(0, 0, d_1, d_2, d_3). \quad (\text{B.90})$$

Notons que pour chaque  $(d_1, d_2, d_3)$  dans  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\varpi_2(s, s, d_1, d_2, d_3)$  et  $\hat{D}_2(s, s, s)$  sont de classe  $K$ .

Donc, dû à (B.3) avec  $\rho = 2\text{Id}$ , (B.83) et (B.86) impliquent, pour tous les  $t \geq 0$ ,

$$|z(t)| \leq \hat{\beta}_2\left(\left|\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix}\right|, t\right) + \varpi_2(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3) + \hat{D}_2(d_1, d_2, d_3) \quad (\text{B.91})$$

où  $d_1, d_2$  et  $d_3$  sont données par hypothèse.

Puisque  $\beta_1$  est de classe  $KL$ , vus (B.76) et (B.3) avec  $\rho = 2\text{Id}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \beta_1(|x(t/2)|, t/2) &\leq \beta_1(2\chi_1(|x(0)|, |z(0)|), t/2) \\ &\quad + \beta_1(2\omega_1(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3) + 2D_1(d_1, d_2, d_3), 0). \end{aligned} \quad (\text{B.92})$$

Aussi avec (B.91), nous avons :

$$\sup_{\tau \in [t/2, t]} \{|z(\tau)|\} \leq \hat{\beta}_2\left(\left|\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix}\right|, \frac{t}{2}\right) + \hat{k}_2(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3). \quad (\text{B.93})$$

Définissons, pour tous les  $(s, t, d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}_+^5$ ,

$$\hat{\beta}_1(s, t) := \beta_1(2\chi_1(s, s), t/2) + \gamma_1\left(2\hat{\beta}_2(s, t/2)\right) \quad (\text{B.94})$$

$$\begin{aligned}\widehat{k}_1(s, t, d_1, d_2, d_3) &:= \beta_1(2\omega_1(s, t, d_1, d_2, d_3) + 2D_1(d_1, d_2, d_3), 0) + d_1 \\ &\quad + \gamma_1\left(s + \widehat{k}_2(s, t, d_1, d_2, d_3)\right)\end{aligned}\tag{B.95}$$

$$\varpi_1(s, t, d_1, d_2, d_3) := \widehat{k}_1(s, t, d_1, d_2, d_3) - \widehat{k}_1(0, 0, d_1, d_2, d_3)\tag{B.96}$$

$$\widehat{D}_1(d_1, d_2, d_3) := \widehat{k}_1(0, 0, d_1, d_2, d_3) .\tag{B.97}$$

Notons que  $\widehat{\beta}_1$  est de classe  $KL$  et, pour chaque  $(d_1, d_2, d_3)$  dans  $\mathbb{R}_+^3$ ,  $\varpi_1(s, s, d_1, d_2, d_3)$  et  $\widehat{D}_1(s, s, s)$  sont de classe  $K$ .

Si bien qu'en substituant (B.91) dans (B.59) avec  $(s, t) = (t/2, t)$ , nous obtenons, pour tous les  $t \geq 0$ ,

$$|x(t)| \leq \widehat{\beta}_1\left(\left|\begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix}\right|, t\right) + \varpi_1(\|u_1\|, \|u_2\|, d_1, d_2, d_3) + \widehat{D}_1(d_1, d_2, d_3)\tag{B.98}$$

où  $d_1, d_2$  et  $d_3$  sont données par hypothèse.

Finalement, vus (B.91) et (B.98), par causalité, (B.77) existe avec :

$$\beta(s, t) := \widehat{\beta}_1(s, t) + \widehat{\beta}_2(s, t)\tag{B.99}$$

$$\gamma(s) := \varpi_1(s, s, d_1, d_2, d_3) + \varpi_2(s, s, d_1, d_2, d_3)\tag{B.100}$$

$$d := \widehat{D}_1(d_1, d_2, d_3) + \widehat{D}_2(d_1, d_2, d_3) .\tag{B.101}$$

Comme il peut être immédiatement vérifié, la fonction  $\beta$ , définie par (B.99), est de classe  $KL$  et la fonction  $\gamma$ , définie par (B.100), est de classe  $K$ . Aussi,  $d$ , définie par (B.101), est égale à zéro lorsque  $d_1 = d_2 = d_3 = 0$ . Le dernier point du théorème 1.10 est donc démontré.

Notons que, dû à la Remarque B.1, la fonction  $\gamma$  définie dans (B.100) est complètement connue.  $\square$

### B.3 Démonstration du théorème 1.14

Pour prouver ce théorème du petit gain local, nous reprenons la même idée dans la preuve du théorème 1.10. Dénотons par  $B_x(\eta)$  (resp.  $B_z(\eta)$ ) une boule ouverte dans  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^r$ ), de rayon  $\eta$ , centrée en  $x = 0$  (resp.  $z = 0$ ), i.e. :

$$B_x(\eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \eta\}, \quad B_z(\eta) = \{z \in \mathbb{R}^r \mid |z| < \eta\}.$$

Pour chaque condition initiale  $(x(0), z(0))$  satisfaisant :

$$x(0) \in U_x \cap B_x(\eta), \quad z(0) \in U_z \cap B_z(\eta)$$

où  $0 < \eta \leq s^*$  est à choisir ci-après, par régularité, il existe une seule solution maximale de (1.28) de  $[0, T)$  dans  $B_x(s^*) \times B_z(s^*)$ , notée  $(x(t), z(t))$  pour  $0 \leq t < T$  (ici,  $T > 0$  peut être infini). Selon les hypothèses de LISS, pour chaque couple de temps  $(s, t)$  tels que :

$$0 \leq s \leq t < T, \quad (\text{B.102})$$

nous avons :

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(s)|, t-s) + \gamma_x(\|z_{[s,t]}\|) \quad (\text{B.103})$$

$$|z(t)| \leq \beta_z(|z(s)|, t-s) + \gamma_z(\|x_{[s,t]}\|). \quad (\text{B.104})$$

Notons que (B.103) et (B.104) est une forme particulière de (B.59)-(B.60). Reprenant la même idée que dans la preuve du théorème 1.10 sauf qu'on n'a plus besoin d'utiliser le Lemme B.2, on finit par montrer que :

$$|x(t)| \leq \chi_1(|x(0)|, |z(0)|) \quad \forall t \in [0, T) \quad (\text{B.105})$$

où  $\chi_1$ , définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , est donnée par :

$$\chi_1(s_1, s_2) = \rho_2^{-1} \{ \beta_x(s_1, 0) + \gamma_x \circ (\text{Id} + \rho_1) \circ \rho_1^{-1} [\beta_z(s_2, 0)] \}.$$

Notons que la fonction  $\chi_1(s, s)$  est de classe  $K$  en  $s$ . En substituant la borne de (B.105) dans (B.104), nous obtenons :

$$|z(t)| \leq \chi_2(|x(0)|, |z(0)|) \quad \forall t \in [0, T) \quad (\text{B.106})$$

où  $\chi_2$  est définie sur  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  par :

$$\chi_2(s_1, s_2) = \beta_z(s_2, 0) + \gamma_z(\chi_1(s_1, s_2)).$$

Notons que la fonction  $\chi_2(s, s)$  est de classe  $K$  en  $s$ . Maintenant, choisissons  $\eta$  dans  $(0, s^*]$  suffisamment petit tel que :

$$\max\{\chi_1(\eta, \eta), \chi_2(\eta, \eta)\} < s^*. \quad (\text{B.107})$$

Avec un tel choix pour la condition initiale  $(x(0), z(0))$ , et (B.105) et (B.106), nous obtenons que  $T = +\infty$ . En effet, sinon, par le théorème de continuation des solutions d'une équation différentielle [21], on aurait la convergence de  $(x(t), z(t))$  vers  $\partial(B_x(s^*) \times B_z(s^*))$ , la frontière de l'ensemble  $B_x(s^*) \times B_z(s^*)$ , lorsque  $t$  tend vers  $T$ . Mais ceci est en contradiction avec (B.105)-(B.106), puisqu'avec (B.107), ces inégalités impliquent :

$$\sup_{0 \leq t < T} \{|x(t)|\} < s^*, \quad \sup_{0 \leq t < T} \{|z(t)|\} < s^*.$$

Par conséquent,  $T = +\infty$ . D'après Hahn [20, Theorem 35.1], à partir de (B.105) et (B.106), nous avons effectivement démontré la stabilité de l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$ .

Reste à montrer la stabilité asymptotique de l'équilibre  $(x, z) = (0, 0)$  du système (1.28). Reprenant l'idée dans l'étape 2 de la preuve du théorème 1.10, toujours à l'aide du lemme B.1, nous arrivons à montrer l'existence d'une fonction de classe  $KL$ , notée  $\beta$ , telle que :

$$\left| \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right| \leq \beta \left( \left| \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \right|, t \right) \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{B.108})$$

D'après Hahn [20, Theorem 35.1, Theorem 35.2], vu (B.108), on conclut que  $(x, z) = (0, 0)$  est asymptotiquement stable.  $\square$

## B.4 Démonstration de la proposition 1.1

Puisque la fonction  $F$  est régulière sur  $\Omega$ , pour chaque condition initiale  $X(0) \in \Omega$ , il existe une seule solution de (1.51)  $X : [0, T) \rightarrow \Omega$ , de classe  $C^1$ , définie maximale sur l'intervalle semi-ouvert  $[0, T)$ .

Pour une telle solution  $X(t)$ , considérons  $x(t) = H(X(t), t)$  et la fonction du temps  $V(x(t))$ . Selon (1.73) et (1.77), en prenant  $\mu = (1 - \mu_1 - \mu_2)/2$ , nous avons :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \beta_1(\alpha(V(x(0))), t) + \gamma_1 \left( \sup_{\tau \in [0, t]} \{\Upsilon(x(\tau))\} \right) + D_1 \quad (\text{B.109})$$

$$\Upsilon(x(t)) \leq \sup_{0 \leq \tau \leq t} \{\alpha(V(x(\tau)))\} \quad \forall t \in [0, T) \quad (\text{B.110})$$

où  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  et  $D_1$  sont définies dans (1.74), (1.75) et (1.76) respectivement. Reprenons les arguments de la preuve du théorème 1.9. En remplaçant  $\Upsilon(x(\tau))$  dans (B.109) par la borne de (B.110), nous obtenons, pour tout  $t$  dans  $[0, T)$ ,

$$\alpha(V(x(t))) \leq \frac{1 - \mu_1 + \mu_2}{1 - \mu_1 - \mu_2} [\beta_1(\alpha(V(x(0))), 0) + D_1] . \quad (\text{B.111})$$

Comme  $\alpha$  est de classe  $K_\infty$  et  $V$  est propre,  $x(t)$  est bornée sur  $[0, T)$ . Puis, grâce à l'hypothèse OE (1.54), on en déduit qu'il existe un compact  $\mathcal{K} \subset \Omega$  où  $X(t)$  reste pour tout  $t \in [0, T)$ , et donc par contradiction que  $T = +\infty$ .

Il reste à montrer la convergence. Le cas ici est plus simple que celui du théorème 1.9. D'après l'hypothèse (1.82), nous avons, pour chaque couple de temps  $(t_0, t)$  tels que  $t_* \leq t_0 \leq t < +\infty$ ,

$$\alpha(V(x(t))) \leq \beta_1(\alpha(V(x(t_0))), t - t_0) + \frac{2\mu_2}{1 - \mu_1 + \mu_2} \sup_{\tau \in [t_0, t]} \Upsilon(x(\tau)) , \quad (\text{B.112})$$

$$\Upsilon(x(t)) \leq \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{\alpha(V(x(\tau)))\} \quad (\text{B.113})$$

En substituant (B.113) dans (B.112), nous avons :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \beta_1(\alpha(V(x(t_0))), t - t_0) + \frac{2\mu_2}{1 - \mu_1 + \mu_2} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \{\alpha(V(x(\tau)))\} . \quad (\text{B.114})$$

Notons que  $2\mu_2/(1 - \mu_1 + \mu_2) < 1$ . Ensuite, en mettant  $t_0 = t/2$  dans (B.114) et en utilisant le fait que  $\alpha(V(x(t)))$  est bornée sur  $[0, +\infty)$ , nous concluons avec le Lemme B.1 que  $\alpha(V(x(t)))$  et donc  $V(x(t))$  convergent vers zéro quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .



## B.5 Démonstration de la proposition 1.2

**1. Existence et unicité.** Puisque la fonction  $F$  est régulière sur  $\Omega$ , pour chaque condition initiale  $X(0) \in \Omega$ , il existe une seule solution de (1.51)  $X : [0, T) \rightarrow \Omega$ , de classe  $C^1$ , où  $[0, T)$  est son intervalle semi-ouvert maximal à droite. Alors considérons  $x(t) = H(X(t), t)$  comme la trajectoire observée de  $X(t)$  et étudions la fonction du temps  $V(x(t))$ .

**2. Bornitude.** D'après les hypothèses (1.59), GUEC (1.63) et (H), la dérivée temporelle de  $V$  le long de cette solution satisfait :

$$\frac{d}{dt} V(x(t)) \leq -(1 - \mu_1) W(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \{\Upsilon(x(s))\} + D \quad \forall t \in [0, T) . \quad (\text{B.115})$$

Soit  $V^*$  le nombre réel positif défini par :

$$V^* = \max \left\{ V(x(0)), \sup \left\{ V(x) \mid x \in \mathbb{R}^n \text{ et } W(x) \leq \frac{D}{1 - \mu_1 - \mu_2} \right\} \right\} . \quad (\text{B.116})$$

Vu (1.84),  $V^*$  est bien défini. Avec  $\{v_i\}_{i=0}^{i=+\infty}$  la suite donnée dans (H), soit  $i$  l'entier le plus petit tel que  $V^* < v_i$  et  $S$  un ensemble défini par :

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \max\{V^*, u_i\}\} . \quad (\text{B.117})$$

Notons que  $u_i$  dépend de  $x(0)$  et ne peut pas être infini. Parce que  $V$  est propre et  $x(0) \in S$ ,  $S$  est donc un ensemble compact et non vide. Nous allons démontrer que  $x(t) \in S$  pour tous les  $t \in [0, T)$ .

En effet, si ceci est faux, il existe  $\varepsilon \in (0, v_i - \max\{V^*, u_i\})$  tel que l'ensemble

$$\{t \in [0, T) \mid V(x(t)) \geq \max\{V^*, u_i\} + \varepsilon\}$$

est non vide. Posons :

$$t_3 = \inf\{t \in [0, T) \mid V(x(t)) \geq \max\{V^*, u_i\} + \varepsilon\} . \quad (\text{B.118})$$

Par continuité, nous avons :

$$V(x(t_3)) = \sup_{0 \leq s \leq t_3} \{V(x(s))\} \in [u_i, v_i] . \quad (\text{B.119})$$

Notons que, dû à (1.62) et (B.119), nous avons :

$$\sup_{s \in [0, t_3]} \{\Upsilon(x(s))\} - W(x(t_3)) \leq 0 . \quad (\text{B.120})$$

Soit  $\delta$  un nombre réel défini par :

$$2\delta = W(x(t_3)) - \frac{D}{1 - \mu_1 - \mu_2} . \quad (\text{B.121})$$

Puisque  $x(t_3)$  n'appartient pas à  $S$ ,  $\delta$  est strictement positif. Alors si nous choisissons  $\eta \in (0, \frac{\delta(1-\mu_1-\mu_2)}{\mu_2})$ , la continuité de  $\Upsilon(x(t))$  et  $W(x(t))$  implique l'existence de deux instants  $t_1 < t_3 < t_2$  dans  $[0, T)$  tels que pour tous les  $t \in [t_1, t_2]$ ,

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \{\Upsilon(x(s))\} - W(x(t)) \leq \eta, \quad W(x(t)) \geq \frac{D}{1 - \mu_1 - \mu_2} + \delta . \quad (\text{B.122})$$

Donc, pour tous les  $t \in [t_1, t_2]$ , nous avons :

$$\overline{\dot{V}(x(t))} \leq -(1 - \mu_1) W(x(t)) + \mu_2 W(x(t)) + \mu_2 \eta + D < 0. \quad (\text{B.123})$$

On en déduit que  $V(x(t_1)) > V(x(t_3))$ . Ceci contredit (B.119) puisque  $t_1 < t_3$ . On en conclut que  $x(t) \in S$  pour tous les  $t \in [0, T]$ . Avec l'hypothèse OE (1.54), ceci implique la bornitude de la solution  $X(t)$  sur  $[0, T]$ . D'après le Théorème sur la continuation des solutions d'une équation différentielle (voir [21]), il en résulte que  $T = +\infty$  et que  $X(t)$  est bornée sur  $[0, +\infty)$ .

**3. Convergence.** Maintenant, nous considérons le cas où (1.85) et (1.86) existent. Dans ce cas, à la place de (B.115), nous avons :

$$\overline{\dot{V}(x(t))} \leq -(1 - \mu_1) W(x(t)) + \mu_2 \sup_{t_0 \leq s \leq t} \{\alpha(V(x(s)))\} + D(t, t_0) \quad (\text{B.124})$$

avec  $0 \leq D(t, t_0) \leq D$  et  $D(t, t_0)$  tend vers 0 lorsque  $t - t_0$  tend vers  $+\infty$ . Nous voulons établir que  $V(x(t))$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Posons  $T_0 = 0$ . Puisque, à partir de nos analyses précédentes,  $x(t) \in S$ , et  $V$  est continue, il existe une constante positive  $V_0$  telle que :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \alpha(V_0), \quad \forall t \in [T_0, +\infty). \quad (\text{B.125})$$

Par hypothèse  $D(t, 0)$  tend vers 0, et donc pour certain  $\rho$  dans  $(0, 1 - \mu_1 - \mu_2)$ , il existe un instant  $T_{0,1} > 0$  tel que :

$$D(t, 0) \leq \rho \alpha(V_0), \quad \forall t \geq T_{0,1}. \quad (\text{B.126})$$

Donc, vus (1.85), (B.115) et (B.125), nous obtenons :

$$\overline{\dot{V}(x(t))} \leq -(1 - \mu_1) \alpha(V(x(t))) + \mu_2 \alpha(V_0) + \rho \alpha(V_0), \quad \forall t \in [T_{0,1}, +\infty). \quad (\text{B.127})$$

Comme dans [70, Proof of Theorem 1], ceci implique l'existence de  $T_1 \geq T_{0,1}$  tel que :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \frac{\mu_2 + \rho}{1 - \mu_1} \alpha(V_0), \quad \forall t \geq T_1. \quad (\text{B.128})$$

Puisque  $\alpha$  est une fonction de classe  $K$ , en posant :

$$\alpha(V_1) = \frac{\mu_2 + \rho}{1 - \mu_1} \alpha(V_0), \quad (\text{B.129})$$

nous avons établi :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \alpha(V_1), \quad \forall t \in [T_1, +\infty). \quad (\text{B.130})$$

En répétant le même raisonnement sur l'intervalle  $[T_1, +\infty)$  au lieu de  $[T_0, +\infty)$ , nous obtenons deux instants  $T_2 \geq T_{0,2} \geq T_1$  tels que

$$D(t, T_1) \leq \rho \alpha(V_1), \quad \forall t \geq T_{0,2} \quad (\text{B.131})$$

et

$$\alpha(V(x(t))) \leq \frac{\mu_2 + \rho}{1 - \mu_1} \alpha(V_1), \quad \forall t \geq T_2. \quad (\text{B.132})$$

Donc, nous avons :

$$\alpha(V(x(t))) \leq \left( \frac{\mu_2 + \rho}{1 - \mu_1} \right)^2 \alpha(V_0), \quad \forall t \geq T_2. \quad (\text{B.133})$$

Continuant ce processus, nous trouvons une suite non-décroissante de nombres réels positifs  $T_n$  telle que, pour chaque  $n$ ,

$$\alpha(V(x(t))) \leq \left( \frac{\mu_2 + \rho}{1 - \mu_1} \right)^n \alpha(V_0), \quad \forall t \geq T_n. \quad (\text{B.134})$$

Puisque  $\alpha$  est de classe  $K$  et avec (B.134), nous concluons que  $V(x(t))$  tend vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

## B.6 Démonstration de la proposition 1.5

Comme la preuve de la Proposition 1.5 est similaire à celle de la Proposition 1.2 (cf. Section B.5), nous ne donnons qu'une esquisse de sa preuve.

Due à l'hypothèse (1.150), nous définissons un voisinage ouvert de l'origine  $\Omega_2$  par :

$$\Omega_2 = \{X \in \mathbb{R}^N \mid V(H(X, 0)) < \Delta_{\mathcal{K}}\} \bigcap \Omega_0 \subset \Omega_1 . \quad (\text{B.135})$$

D'après notre hypothèse de régularité, pour chaque  $X(0) \in \Omega_2$ , il existe une seule solution  $X : [0, T) \rightarrow \Omega_1$  avec  $[0, T)$  comme son intervalle semi-ouvert maximal à droite. Soit  $x(t) = H(X(t), t)$  la sortie de cette solution. Elle est une fonction de classe  $C^1$  dont les valeurs sont dans  $\mathcal{U}$ . Alors, d'après les hypothèses (1.153) et LUEC (1.155), le long de cette solution, la dérivée temporelle de  $V$  satisfait :

$$\dot{V}(x(t)) \leq -(1 - \mu_1) W(x(t)) + \mu_2 \sup_{0 \leq s \leq t} \Upsilon(x(s)) + D \quad \forall t \in [0, T) . \quad (\text{B.136})$$

Puisque  $\Upsilon(x) = \alpha(V(x)) \leq W(x)$  et  $\alpha$  est croissante, il n'est pas difficile de vérifier que (1.62) est satisfaite par cette fonction  $\Upsilon$ , avec  $u_0 = 0$  et  $v_0 = \sup_{x \in \mathcal{U}} V(x)$ . Considérons donc l'ensemble  $S$  comme défini dans (B.117). Notons que, puisque  $X(0) \in \Omega_2$ ,  $V(x(0)) < \Delta_{\mathcal{K}}$ . D'autre part, vus (1.153) et (1.158), pour tous les  $x$  satisfaisant :

$$W(x) \leq \frac{D}{1 - \mu_1 - \mu_2} \leq \alpha(\Delta_{\mathcal{K}}) ,$$

nous avons :

$$V(x) \leq \Delta_{\mathcal{K}} .$$

Il s'en suit que  $S$  est contenu dans le compact  $\mathcal{K}$  qui est un sous-ensemble de  $\mathcal{U}$ . Donc en répétant les mêmes arguments que ceux suivant l'équation (B.117), nous pouvons démontrer que  $x(t) \in \mathcal{K}$  pour tous les  $t \in [0, T)$ . Finalement, avec l'hypothèse OEV (1.151),  $X(t)$  appartient au sous-ensemble compact  $\Gamma$  de  $\Omega_1$  pour tous les  $t \in [0, T)$ . Le Théorème sur la continuation des solutions d'une équation différentielle implique  $T = +\infty$ . Puisque  $V$  est définie positive, le dernier point de la Proposition 1.5 est démontré comme dans la preuve de la Proposition 1.2 (voir Section B.5).



## Annexe C

# Démonstrations liées au Chapitre 2

### C.0 Quatres lemmes techniques

Le premier lemme, dû au Prof. Jean-Michel Coron, est un résultat technique d'existence. Il sera utilisé dans la section C.2.

**Lemme C.1** [66] *Etant donnée une fonction continue  $k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ . Si, pour un nombre réel strictement positif  $\eta$ , nous avons :*

$$k(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0, \eta] , \quad (\text{C.1})$$

*alors il existe une fonction  $W : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  qui est propre, strictement croissante et régulière, et un nombre réel positif  $\mu$  tels que :*

$$\left. \begin{array}{ll} 1. & W(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in [0, \mu] \\ 2. & W(x) \geq k(x) \quad \forall x \geq 0 \\ 3. & W'(x) > 0 \quad \forall x > 0 . \end{array} \right\} \quad (\text{C.2})$$

*Preuve :* Pour chaque entier  $i$ , dénotons par  $S_i$  l'ensemble ouvert suivant :

$$S_i = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{i-1} < x < 2^{i+1}\} .$$

Nous avons :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} S_i = (0, +\infty) .$$

Alors soit  $\{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  la partition de l'unité associée à ce recouvrement ouvert [6, Theorem V.4.4]. Définissons :

$$c_i := \sup \left\{ \{k(x) \mid x \in S_i\} \cup \{0\} \right\} \geq 0 .$$

La fonction  $\overline{W}_1$ , définie par :

$$\overline{W}_1(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \alpha_i(x) ,$$

est régulière et satisfait :

$$\left. \begin{array}{ll} 1. & \overline{W}_1(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \mu_1] \\ 2. & \overline{W}_1(x) \geq k(x) \quad \forall x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (\text{C.3})$$

où  $\mu_1$  est un nombre réel strictement positif. Suivant le même cheminement mais avec  $k$  remplacée par  $-\overline{W}_1'$ , nous obtenons une autre fonction  $\overline{W}_2$ . Finalement la preuve est complète en prenant :

$$W(x) = \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x \overline{W}_2(s)ds + \overline{W}_1(x) . \quad (\text{C.4})$$

□

Le lemme suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition 2.1 (voir Section C.1). Sa preuve se déduit directement du Lemme C.1.

**Lemme C.2** *Pour chaque fonction continue  $k : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que, pour une constante strictement positive  $\eta$ ,*

$$k(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0, \eta] ,$$

*il existe une fonction régulière  $W$  de classe  $K_\infty$  telle que :*

$$W(x) \geq k(x) \quad \forall x \geq 0 , \quad W^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i \geq 1 . \quad (\text{C.5})$$

Notons que la fonction  $W$  déduite par le Lemme C.2 n'admet pas le comportement localement quadratique, à la grande différence avec la fonction  $W$  définie dans (C.2).

*Preuve :* Selon la partition de l'unité [6, Theorem V.4.4], choisissons une fonction régulière  $W_0$  de classe  $K_\infty$  telle que :

$$W_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{si } x \in (0, \eta] \\ x/\eta & \text{si } x \in [2\eta, +\infty) . \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

Puis, faisant exactement les mêmes raisonnements dans la preuve du Lemme C.1 et remplaçant seulement le terme  $\frac{1}{2}x^2$  dans (C.4) par  $W_0$ , nous obtenons la fonction  $W$  qui satisfait (C.5). □

Notre troisième lemme montre que n'importe quelle fonction de classe  $KL$  peut être bornée par une fonction continue de classe  $KL$ . Plus précisément, nous avons :

**Lemme C.3** *Pour chaque fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , il existe une fonction  $\beta^*$  de classe  $KL$  qui est continue de  $\mathbb{R}_+^2$  dans  $\mathbb{R}$  et, pour chaque nombre réel strictement positif  $s$ , la fonction  $\beta^*(s, \cdot)$  est strictement décroissante et satisfait :*

$$\beta(s, t) \leq \beta^*(s, t) , \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ . \quad (\text{C.7})$$

*Preuve :* On prolonge d'abord la fonction  $\beta$  à l'espace  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  de la façon suivante :

$$\beta(s, t) = \beta(s, 0) \quad \text{si } t \leq 0 .$$

Il est évident que pour chaque  $s$  fixé, la nouvelle fonction  $\beta$  est non-croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Puis, définissons une nouvelle fonction, notée  $\widehat{\beta}$ , par :

$$\widehat{\beta}(s, t) = \int_{t-1}^t \beta(s, \tau) d\tau \quad \forall (s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ . \quad (\text{C.8})$$

On montre que  $\widehat{\beta}$  est continue. Pour ce faire, considérons deux nombres réels positifs arbitraires  $s$  et  $t$ , et deux suites quelconques de nombres réels positifs, notées  $\{s_n\}_{n=0}^\infty$  et  $\{t_n\}_{n=0}^\infty$ , qui convergent respectivement vers  $s$  et  $t$ . Remarquons que :

$$\widehat{\beta}(s_n, t_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta(s_n, \tau) \chi_{[t_n-1, t_n]}(\tau) d\tau$$

où  $\chi_{[t_n-1, t_n]}$  est la fonction caractéristique sur  $[t_n - 1, t_n]$ . On observe que, pour presque tout  $\tau$  dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $\beta(s_n, \tau)\chi_{[t_n-1, t_n]}(\tau)$  converge vers  $\beta(s, \tau)\chi_{[t-1, t]}(\tau)$ . D'après le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on en déduit que  $\widehat{\beta}(s, t)$  est continue en  $(s, t)$ . Puisque  $\beta$  est de classe  $KL$ , la fonction  $\widehat{\beta}$ , définie par (C.8), est de classe  $KL$ . La preuve est complète en introduisant la fonction  $\beta^*$  comme :

$$\beta^*(s, t) = \widehat{\beta}(s, t) + \frac{s}{1+t} . \quad (\text{C.9})$$

□

Ce dernier lemme est utilisé dans la preuve de la Proposition 2.7 du Chapitre 2.

**Lemme C.4** *Etant donnés un nombre réel positif  $\delta$  et une fonction  $\gamma$  de classe  $K$ , il existe un nombre réel positif  $\delta_1$  tel que, pour tous les  $V \geq 0$  et  $V_* > 0$  satisfaisant :*

$$\log \left( 1 + \int_0^V \gamma(s) ds \right) \leq \log \left( 1 + \int_0^{V_*} \gamma(s) ds \right) + \delta , \quad (\text{C.10})$$

on a :

$$V \leq e^\delta V_* + \delta_1 . \quad (\text{C.11})$$

*Preuve :* Avec l'égalité suivante :

$$\log \left( 1 + \int_0^{V_*} \gamma(s) ds \right) + \delta = \log \left( e^\delta + e^\delta \int_0^{V_*} \gamma(s) ds \right) ,$$

(C.10) donne :

$$\int_0^V \gamma(s) ds \leq e^\delta - 1 + e^\delta \int_0^{V_*} \gamma(s) ds . \quad (\text{C.12})$$

Puisque  $\gamma$  est de classe  $K$ , il existe un réel positif  $\delta_1$ , dépendant de  $\delta$  et de  $\gamma$ , tel que :

$$e^\delta - 1 = \int_0^{\delta_1} \gamma \left( \frac{s}{e^\delta} \right) ds . \quad (\text{C.13})$$

Et puisque  $V_*$  est positif, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned} e^\delta - 1 &\leq \int_0^{\delta_1} \gamma \left( V_* + \frac{s}{e^\delta} \right) ds \\ &\leq \int_{e^\delta V_*}^{e^\delta V_* + \delta_1} \gamma \left( \frac{s}{e^\delta} \right) ds . \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

D'autre part, nous avons :

$$e^\delta \int_0^{V_*} \gamma(s) ds = \int_0^{e^\delta V_*} \gamma \left( \frac{s}{e^\delta} \right) ds . \quad (\text{C.15})$$

Ainsi, de (C.14), (C.15) et (C.12), nous déduisons :

$$\begin{aligned} \int_0^V \gamma(s) ds &\leq \int_0^{e^\delta V_* + \delta_1} \gamma(s/e^\delta) ds \\ &\leq \int_0^{e^\delta V_* + \delta_1} \gamma(s) ds . \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

L'inégalité (C.11) est alors obtenue en utilisant le fait que  $\gamma$  est positive. □

## C.1 Démonstration de la proposition 2.1

Nous avons besoin du lemme suivant pour démontrer la Proposition 2.1.

**Lemme C.5** *Pour chaque fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et pour chaque nombre réel strictement positif  $\lambda$ , il existe deux nombres réels strictement positifs  $C$  et  $\eta_1$  et une fonction régulière  $\gamma_0$  de classe  $K_\infty$  tels que :*

$$\gamma(x) \leq C \gamma_0(x + \lambda) \quad \forall x \geq 0 \quad (\text{C.17})$$

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{2} x^2 \quad \forall x \in [0, \eta_1] . \quad (\text{C.18})$$

De plus, s'il existe deux nombres réels strictement positifs  $C'$  et  $\eta_2$  tels que :

$$\gamma(x) \leq C' x^2 \quad \forall x \in [0, \eta_2] , \quad (\text{C.19})$$

alors (C.17) et (C.18) sont satisfaites avec :

$$\lambda = 0 \quad , \quad C = 2 C' \quad , \quad \eta_1 = \frac{1}{2} \eta_2 . \quad (\text{C.20})$$

*Preuve :* Puisque  $\gamma$  est continue, pour chaque  $\lambda > 0$  et chaque  $\eta > 0$ , il existe un nombre réel strictement positif  $C(\lambda, \eta)$  tel que :

$$C(\lambda, \eta) = \sup_{x \in [0, \eta]} \frac{\gamma(x)}{(x + \lambda)^2 / 2} .$$

En d'autres termes, nous avons :

$$\gamma(x) \leq \frac{C}{2} (x + \lambda)^2 \quad \forall x \in [0, \eta] . \quad (\text{C.21})$$

Alors  $k$ , défini par :

$$k(x) = \gamma(x) - \frac{C}{2} (x + \lambda)^2 , \quad (\text{C.22})$$

est une fonction continue de  $[0, \infty)$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $k(x) \leq 0$  pour tous les  $0 \leq x \leq \eta$ . Utilisant le Lemme C.2 avec cette fonction  $k$ , nous obtenons une fonction régulière  $\tilde{\gamma}$  de classe  $K_\infty$  satisfaisant :

$$\tilde{\gamma}(x) \geq k(x) , \quad \forall x \geq 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}^{(i)}(0) = 0 , \quad \forall i \in \mathbb{N} .$$

Etendons la fonction  $\tilde{\gamma}$  pour qu'elle soit définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$\tilde{\gamma}(x) = 0 \quad \forall x < 0 .$$

Comme il peut être directement vérifié, la fonction  $\gamma_0$ , définie par :

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{C} \tilde{\gamma}(x - \lambda) , \quad (\text{C.23})$$

est de classe  $K_\infty$  et satisfait le premier point du Lemme C.5 avec  $\eta_1 := \min\{\eta, \lambda\}$ .

Le dernier point de notre lemme est une conséquence directe du Lemme C.2 en considérant :

$$k(x) = \gamma(x + \eta_2/2) - C'(x + \eta_2/2)^2 .$$



Remarquons que  $k$  est non-positive sur l'intervalle  $[0, \eta_2/2]$ . Soit  $\tilde{\gamma}$  la fonction dominante donnée par le Lemme C.2, qui est régulière sur  $\mathbb{R}$  en posant  $\tilde{\gamma}(x) = 0 \forall x < 0$ . Alors (C.23) devient :

$$\gamma_0(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2C'}\tilde{\gamma}(x - \eta_2/2)$$

qui satisfait (C.17) et (C.18) avec  $\lambda = 0$ ,  $C = 2C'$  et  $\eta_1 = \eta_2/2$ .  $\square$

Preuve de la Proposition 2.1 :

Considérons la fonction :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2. \quad (\text{C.24})$$

Sa dérivée de Lie le long du champ de vecteurs donné par (2.2) vérifie :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x\omega_0 u + x\omega \\ &\leq x\omega_0 u + \frac{1}{4}x^2 + \omega^2. \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Soit  $\gamma$  une fonction quelconque de classe  $K_\infty$ . En appliquant le Lemme C.5 avec  $(\gamma^{-1})^2$  et un  $\lambda > 0$  arbitraire, il existe deux réels positifs  $C$  et  $\eta$  et une fonction régulière  $\gamma_0$  de classe  $K_\infty$  tels que :

$$(\gamma^{-1}(s))^2 \leq C\gamma_0(s + \lambda) \quad \forall s \geq 0, \quad (\text{C.26})$$

$$\gamma_0(s) = \frac{1}{2}s^2 \quad \forall s \in [0, \eta] \quad (\text{C.27})$$

où  $\lambda = 0$  et  $C = 2c$  si de plus (2.4) est vérifiée.

Définissons une fonction paire  $u_1$  par :

$$u_1(x) = u_1(-x) = \gamma_0(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.28})$$

Elle est bien définie sur  $\mathbb{R}$  et, vu (C.27), est régulière. Notons que :

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in [-\eta, \eta].$$

Donc, en définissant une loi de commande  $\vartheta$  régulière comme :

$$\vartheta(x) := -\frac{5}{4\delta}x - \frac{ku_1(x)}{\delta x} \quad (\text{C.29})$$

où  $k > 0$  est à choisir, et en remplaçant  $u$  dans (C.25) par cette loi de commande  $\vartheta(x)$ , nous obtenons :

$$\dot{V} \leq -x^2 - ku_1(x) + \omega^2. \quad (\text{C.30})$$

D'après la définition (C.24) de  $V$  et l'algorithme de Sontag relatif à la propriété ISS (voir Appendice A), (C.30) implique que, pour toute fonction  $\omega$  du temps continue et bornée, toutes les solutions  $x(t)$  de (2.2) sont définies sur  $[0, +\infty)$  et satisfont :

$$|x(t)| \leq e^{-t}|x(0)| + \gamma_0^{-1}\left(\frac{1}{k}\|\omega_t\|^2\right) \quad \forall t \geq 0. \quad (\text{C.31})$$

Comme (C.26) donne :

$$\gamma_0^{-1}(s) \leq \gamma \left( (Cs)^{\frac{1}{2}} \right) + \lambda \quad \forall s \geq 0, \quad (\text{C.32})$$

on peut réécrire (C.31) en :

$$|x(t)| \leq e^{-t}|x(0)| + \gamma \left( \left( \frac{C}{k} \right)^{1/2} \|\omega_t\| \right) + \lambda \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{C.33})$$

où  $\lambda = 0$  si (2.4) est vérifié. Finalement, le choix de  $k$  dans  $[C, +\infty)$  permet de conclure.

## C.2 Démonstration de la proposition 2.2

On démontre d'abord trois lemmes techniques dont on a besoin.

**Lemme C.6** *Pour chaque fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et chaque nombre réel strictement positif  $\eta$ , il existe une fonction  $V_1(y)$  positive définie, propre et régulière, et une fonction  $u_0$  régulière telles que  $u_0(0) = 0$  et telle que, pour tous les  $y \in \mathbb{R}$ , nous avons :*

$$-\nabla V_1(y)u_0(y) \geq V_1(y) \geq \gamma(|y|)^2 - \eta . \quad (\text{C.34})$$

De plus, s'il existe deux constantes positives  $\chi$  et  $C$  telles que :

$$\gamma(s) \leq Cs \quad \forall s \in [0, \chi] , \quad (\text{C.35})$$

alors le même résultat est vérifié avec  $\eta = 0$ .

*Preuve :* Le résultat est une conséquence directe de l'application du Lemme C.1. En effet, soit  $W$  la fonction donnée par le Lemme C.1 avec :

$$k(x) = \gamma(x)^2 - \eta .$$

Nos fonctions  $V_1$  et  $u_0$  peuvent être choisies comme :

$$V_1(y) = V_1(-y) = W(y) \quad \forall y \geq 0 , \quad (\text{C.36})$$

et :

$$u_0(y) = -V_1(y)/V_1'(y) \quad \forall y \in \mathbb{R} . \quad (\text{C.37})$$

Dans le cas où (C.35) est vérifiée, en utilisant le Lemme C.1 maintenant avec :

$$k(x) = \gamma(x)^2 - C^2x^2 ,$$

nous obtenons une fonction adéquate  $W$ , et finalement la fonction  $V_1$  est donnée par :

$$V_1(y) = V_1(-y) = W(y) + C^2y^2 \quad \forall y \geq 0 , \quad (\text{C.38})$$

et la fonction  $u_0$  est définie comme dans (C.37).  $\square$

**Lemme C.7 (Ajout d'une perturbation)** *Supposons que pour le système nonlinéaire :*

$$\dot{x} = f(x) + \Omega + gu , \quad (\text{C.39})$$

*il existe un contrôleur  $\vartheta$  de classe  $C^l$  et une fonction  $V$  de classe  $C^{l+1}$ , tels que  $\vartheta(0) = 0$ ,  $L_g V(0) = 0^1$  et pour chaque solution  $x(t)$  de (C.39) avec  $u = \vartheta(x)$ , nous avons :*

$$\dot{V} \leq -V(x) + \alpha \quad (\text{C.40})$$

où  $\alpha$  est une fonction du temps. Considérons le système :

$$\dot{x} = f(x) + \Omega + g(u + \omega) . \quad (\text{C.41})$$

Alors, il existe un contrôleur de classe  $C^l$  :

$$\hat{\vartheta}(x) := \vartheta(x) - \frac{1}{4}L_g V(x)$$

tel que le long des solutions de (C.41) avec  $u = \hat{\vartheta}(x)$ , nous avons :

$$\dot{V} \leq -V(x) + \alpha + \omega^2 . \quad (\text{C.42})$$

---

<sup>1</sup>  $L_g V$  signifie la dérivée de Lie de  $V$  le long de  $g : \frac{\partial V}{\partial x}g$ .

*Preuve :* Pour simplifier, on omettra les arguments. La dérivée temporelle de  $V$  le long des solutions de (C.41) avec  $u = v + \vartheta(x)$  se réécrit comme :

$$\dot{V} \leq -V + \alpha + L_g V(v + \omega) .$$

En utilisant l'inégalité quadratique de Young [22], nous avons :

$$L_g V(v + \omega) \leq L_g V\left(v + \frac{1}{4}L_g V\right) + \omega^2 .$$

Ce qui permet de conclure.  $\square$

**Lemme C.8 (Ajout d'un intégrateur)** *Supposons que pour le système nonlinéaire :*

$$\dot{x} = f(x) + \Omega + gu \quad (\text{C.43})$$

avec  $f(0) = 0$ , il existe un contrôleur  $\vartheta$  de classe  $C^{l+1}$  et une fonction  $V$  de classe  $C^{l+1}$  tels que  $\vartheta(0) = 0$ , et  $L_g V(0) = 0$  et, pour chaque solution  $x(t)$  obtenue avec  $u = \vartheta(x)$ , nous avons :

$$\dot{V} \leq -V(x) + \alpha .$$

Alors, pour le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \Omega + gy \\ \dot{y} = u , \end{cases} \quad (\text{C.44})$$

il existe une loi de commande de classe  $C^l$  :

$$\hat{\vartheta}(x, y) := -\frac{1}{2}(y - \vartheta(x)) - L_g V(x) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x)(f(x) + gy) - \frac{1}{4}(y - \vartheta(x))\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x)^\top$$

avec  $\hat{\vartheta}(0, 0) = 0$ , et une fonction de classe  $C^{l+1}$  :

$$U(x, y) = V(x) + \frac{1}{2}(y - \vartheta(x))^2$$

telles que le long des solutions de (C.44) bouclé, nous avons :

$$\dot{U} \leq -U(x, y) + \alpha + \Omega^\top \Omega . \quad (\text{C.45})$$

Remarquons qu'un degré de régularité peut être perdu en passant de  $\vartheta$  et  $V$  à  $\hat{\vartheta}$  (i.e. après avoir ajouté un intégrateur).

*Preuve :* A l'aide de la loi de commande suivante :

$$u = v - \frac{1}{2}(y - \vartheta(x)) - L_g V(x) + \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(f(x) + gy) ,$$

la dérivée temporelle de  $U$  le long des solutions de (C.44) vérifie :

$$\dot{U} \leq -U + \alpha + (y - \vartheta)\left(v - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Omega\right) . \quad (\text{C.46})$$

Mais en utilisant l'inégalité quadratique de Young, nous avons :

$$(y - \vartheta)\left(v - \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Omega\right) \leq (y - \vartheta)\left(v + (y - \vartheta)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial x}^\top\right) + \Omega^\top \Omega ,$$

d'où le résultat.  $\square$

Preuve de la proposition 2.2 :

La preuve est basée sur une application récursive des Lemmes C.7 et C.8 au système (2.10), i.e. :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3 + \omega_2 \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_n &= u + \omega_n . \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

Etape 0 : Choisissons une fonction  $V_1$  définie positive, propre et régulière, et une fonction  $u_0$  régulière telles que  $u_0(0) = 0$  et :

$$\nabla V_1(\xi_1) u_0(\xi_1) \leq -V_1(\xi_1) , \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R} . \quad (\text{C.48})$$

L'existence de ces deux fonctions est assurée par exemple par le Lemme C.6. Notons qu'elles ne sont pas uniques.

Etape 1.1 : Grâce à l'étape 0, le système :

$$\dot{\xi}_1 = u_{11} \quad (\text{C.49})$$

est stabilisable par  $u_{11}(\xi_1) = u_0(\xi_1)$  et le long des solutions de (C.49), nous avons :

$$\dot{V}_1 \leq -V_1 . \quad (\text{C.50})$$

Ensuite, nous considérons le système :

$$\dot{\xi}_1 = u_{12} + \omega_1 . \quad (\text{C.51})$$

Les hypothèses du lemme C.7 sont vérifiées avec :

$$V = V_1 , \quad \alpha = 0 .$$

Donc une application directe du lemme C.7 nous donne une loi de commande  $u_{12}(\xi_1)$  et une fonction de Lyapunov  $V_1$  pour le système (C.51) telles que les hypothèses du lemme C.8 sont satisfaites avec :

$$u_{12}(\xi_1) = u_{11}(\xi_1) - \frac{1}{4} \nabla V_1(\xi_1)$$

et

$$\Omega = \omega_1 , \quad V = V_1 , \quad \alpha = \omega_1^2 , \quad u_{12}(0) = 0 , \quad \nabla V_1(0) = 0 .$$

Etape 1.2 : Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 &= u_{21} . \end{cases} \quad (\text{C.52})$$

En appliquant le lemme C.8 à (C.52), nous obtenons un contrôleur régulier  $u_{21}(\xi_1, \xi_2)$  et une fonction de Lyapunov régulière  $V_2$  tels que les hypothèses du lemme C.7 sont satisfaites pour le système (C.52) avec :

$$\begin{aligned} u_{21}(\xi_1, \xi_2) &= -\frac{1}{2}(\hat{x}_2 - u_{12}(\xi_1)) - \nabla V_1(\xi_1) + \frac{\partial u_{12}}{\partial \xi_1} \xi_2 - \frac{1}{4}(\xi_2 - u_{12}(\xi_1)) \left( \frac{\partial u_{12}}{\partial \xi_1}(\xi_1) \right)^2 \\ V_2(\xi_1, \xi_2) &= V_1(\xi_1) + \frac{1}{2}(\xi_2 - u_{12}(\xi_1))^2, \end{aligned}$$

et

$$\Omega = (\omega_1, 0)^\top, \quad \omega = \omega_2, \quad \alpha = 2\omega_1^2, \quad u_{21}(0, 0) = 0, \quad \nabla V_2(0, 0) = 0.$$

Etape  $i.1$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) : Supposons qu'à l'étape  $(i-1).2$ , nous avons établi un contrôleur régulier  $u_{i1}(\xi_1, \dots, \xi_i)$ , une fonction de Lyapunov régulière  $V_i(\xi_1, \dots, \xi_i)$  et une fonction du temps  $\alpha_i$  pour le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{i-1} = \xi_i + \omega_{i-1} \\ \dot{\xi}_i = u_{i1} \end{array} \right. \quad (C.53)$$

tels que les hypothèses du lemme C.7 sont satisfaites pour (C.53) i.e. :

$$\dot{V}_i \leq -V_i + \alpha_i$$

et

$$\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{i-1}, 0)^\top, \quad \omega = \omega_i, \quad u_{i1}(0, \dots, 0) = 0, \quad \nabla V_i(0, \dots, 0) = 0.$$

En appliquant le lemme C.7 au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{i-1} = \xi_i + \omega_{i-1} \\ \dot{\xi}_i = u_{i1} + \omega_i, \end{array} \right. \quad (C.54)$$

nous obtenons un contrôleur régulier  $u_{i2}$  et une fonction de Lyapunov régulière  $V_i$  pour (C.54) tels que les hypothèses du lemme C.8 sont satisfaites pour le système (C.54) avec :

$$\begin{aligned} u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) &= u_{i1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) - \frac{1}{4} \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) \\ V(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) &= V_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i), \end{aligned}$$

et

$$\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_i)^\top, \quad \alpha = \alpha_i + \omega_i^2, \quad u_{i2}(0) = 0, \quad \nabla V(0) = 0$$

où, pour simplifier, on note par 0 les vecteurs nuls quels que soient leurs ordres.

Etape i.2 : Considérons le système résultant de (C.54) augmenté d'un intégrateur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_i = \xi_{i+1} + \omega_i \\ \dot{\xi}_{i+1} = u_{(i+1)1} \end{array} \right. \quad (\text{C.55})$$

En appliquant le lemme C.8 à (C.55), nous obtenons une fonction du temps  $\alpha_{i+1}$ , un contrôleur régulier  $u_{(i+1)1}$  et une fonction de Lyapunov régulière  $V_{i+1}$  définis par :

$$\begin{aligned} u_{(i+1)1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i+1}) &= -\frac{1}{2}(\xi_{i+1} - u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)) - \nabla V_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) \\ &\quad + \nabla u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)(\xi_2, \dots, \xi_{i+1})^\top \\ &\quad - \frac{1}{4}(\xi_{i+1} - u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i))|\nabla u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)|^2, \\ V_{i+1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{i+1}) &= V_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i) + \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i))^2, \\ \alpha_{i+1} &= \alpha_i + \omega_i^2 + \sum_{j=1}^i \omega_j^2 \end{aligned}$$

tels que les hypothèses du lemme C.7 sont satisfaites pour le système (C.55) avec :

$$\dot{V}_{i+1} \leq -V_{i+1} + \alpha_{i+1}$$

et

$$\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_i, 0)^\top, \quad \omega = \omega_{i+1}, \quad u_{(i+1)1}(0) = 0, \quad \nabla V_{i+1}(0) = 0.$$

Etape n.1 : Considérons maintenant le système original (2.44) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi}_1 = \xi_2 + \omega_1 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 + \omega_2 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = u + \omega_n \end{array} \right. \quad (\text{C.56})$$

En faisant un raisonnement par récurrence, nous obtenons finalement des fonctions régulières  $u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i)$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ), un contrôleur régulier :

$$u = u_{n2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) := L_u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (\text{C.57})$$

et une fonction de Lyapunov régulière  $V_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  pour le système (C.56) tels que pour chaque  $1 \leq i \leq n$ ,  $u_{i2}(0) = 0$  et  $V_n$  satisfait

$$V_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = V_1(\xi_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\xi_{i+1} - u_{i2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i))^2 \quad (\text{C.58})$$

et le long des solutions  $(\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t))$  de (C.56)-(C.57) dont l'intervalle maximal à droite est  $[0, T)$ ,

$$\dot{V}_n(t) \leq -V_n(\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)) + \frac{n(n+1)}{2} \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\omega_i^2\}. \quad (\text{C.59})$$

Une application directe du lemme de Gronwall [21] donne :

$$V_n(t) \leq e^{-t} V_n(0) + \frac{n(n+1)}{2} \left( \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \|\omega_{it}\| \right)^2 \quad \forall t \in [0, T) \quad (\text{C.60})$$

D'après la construction systématique, la fonction  $V_n$  est définie positive, propre en  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ . Donc il existe deux fonctions  $\gamma_{v,1}$ ,  $\gamma_{v,2}$  de classe  $K_\infty$  telle que [53, Theorem 7.13] :

$$\gamma_{v,1}(|(\xi_1, \dots, \xi_n)^\top|) \leq V_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq \gamma_{v,2}(|(\xi_1, \dots, \xi_n)^\top|). \quad (\text{C.61})$$

De (C.60), on déduit que les solutions  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  sont bornées sur  $[0, T)$  et donc  $T = +\infty$ . Finalement, on conclut que (2.10) bouclé avec  $u = L_u(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  dans (C.57) est ISS avec  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  comme entrée.

Il reste à démontrer les propriétés SpES et SES. Pour toute fonction  $\gamma$  de classe  $K_\infty$ , choisissons  $V_1$  et  $u_0$  dans l'étape 0 comme les fonctions résultant du Lemme C.6 avec :

$$\gamma = (2n(n+1))^{\frac{1}{2}} \gamma^{-1}$$

et un  $\eta > 0$  quelconque, i.e. :

$$-\nabla V_1(y) u_0(y) \geq V_1(y) \geq 2n(n+1) \gamma^{-1} (|y|)^2 - \eta \quad (\text{C.62})$$

où  $\eta = 0$  si (2.11) est vérifiée.

D'autre part, (C.58) implique :

$$V_1(\xi_1) \leq V_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad \forall (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Avec (C.62) et (C.60), nous obtenons :

$$|\xi_1(t)| \leq \gamma \left( \frac{4V_n(0)^{1/2} e^{-t/2}}{(2n(n+1))^{1/2}} \right) + \gamma \left( \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \|\omega_{it}\| \right) + \gamma \left( \frac{4\eta^{1/2}}{(2n(n+1))^{1/2}} \right)$$

où l'inégalité faible de triangularité (B.3) a été utilisée. Selon (C.61), le premier terme à droite de l'inégalité précédente peut être bornée par  $\beta(|(\xi_1(0), \dots, \xi_n(0))^\top|, t)$  où  $\beta$  est une fonction de classe  $KL$ . Le troisième terme est égal à zéro si (2.11) est vérifié. Ainsi, nous avons démontré la proposition 2.2.



### C.3 Démonstration de la proposition 2.3

En considérant  $f(z, x)$  comme sortie du sous système  $z$  de (2.12) et  $x$  comme entrée, le sous système  $z$  est SpES. En effet, soit  $(\beta_z, \gamma_z, d_z)$  un triplet de fonctions données par la propriété ISpS du sous système  $z$ , i.e. :

$$|z(t)| \leq \beta_z(|z(0)|, t) + \gamma_z(\|x_t\|) + d_z. \quad (\text{C.63})$$

Supposons sans nuire à la généralité que  $\gamma_z$  est de classe  $K_\infty$ . Définissons  $\gamma_{1,f}$  et  $\gamma_{2,f}$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_{1,f}(s) &:= s + \sup_{\{(z,x): |z| \leq |x| \leq s\}} |f(z, x) - f(0, 0)| \\ \gamma_{2,f}(s) &:= s + \sup_{\{(z,x): |x| \leq |z| \leq s\}} |f(z, x) - f(0, 0)|. \end{aligned} \quad (\text{C.64})$$

Notons que les fonctions  $\gamma_{1,f}$  et  $\gamma_{2,f}$  définies dans (C.64) sont de classe  $K_\infty$  et satisfont :

$$|f(z, x)| \leq \gamma_{1,f}(|x|) + \gamma_{2,f}(|z|) + |f(0, 0)| \quad \forall x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^p. \quad (\text{C.65})$$

Donc, pour démontrer la propriété SpES du sous système  $z$  avec  $f$  comme sortie, considérons une fonction  $x(t)$  quelconque, continue et bornée sur  $[0, +\infty)$ . Soit  $z(t)$  la solution maximale associée définie sur  $[0, +\infty)$ . Vu (C.63), (C.65), nous avons :

$$\begin{aligned} |f(z(t), x(t))| &\leq \gamma_{2,f}(4\beta_z(|z(0)|, t)) + (\gamma_{1,f} + \gamma_{2,f} \circ 2\gamma_z)(\|x_t\|) \\ &\quad + \gamma_{2,f}(4d_z) + |f(0, 0)| \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

Ceci signifie que, le sous système  $z$  est SpES avec la fonction de classe  $K_\infty$

$$\hat{\gamma}_z := \gamma_{1,f} + \gamma_{2,f} \circ 2\gamma_z$$

comme gain. En appliquant la Proposition 2.1 au sous système  $x$  de (2.12) avec :

$$\omega = f(z, x), \quad \omega_0 = g(z, x),$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2}(2\hat{\gamma}_z)^{-1} := \gamma_x, \quad (\text{C.67})$$

nous obtenons une loi de commande  $\vartheta(x)$  régulière, qui est zéro en zéro, telle que le sous système  $x$  de (2.12) est SpES avec  $f(x, z)$  comme entrée,  $x$  comme sortie et  $\gamma_x$  dans (C.67) comme gain. De plus, la condition du petit gain (1.41) entre  $\hat{\gamma}_z$  et  $\gamma_x$  est automatiquement satisfaite avec  $\rho_1 = \text{Id}$ ,  $\rho_2 = \frac{1}{2}\text{Id}$  et  $d_3 = 0$ . Finalement, dû au fait que la propriété OFNB est vérifiée par les deux sous systèmes  $z$  et  $x$ , le premier point de la Proposition 2.3 est démontré à l'aide du théorème du petit gain généralisé 1.9.

Quant au second point de la Proposition 2.3, supposons sans nuire à la généralité que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  dans (2.14) sont de classe  $K_\infty$ . Notons que, d'une part, le sous système  $z$  est maintenant SES avec gain  $\hat{\gamma}_z = \gamma_1 + \gamma_2 \circ 2\gamma_z$ . D'autre part, d'après la Proposition 2.1, (2.14) et (2.15) impliquent en particulier que  $\vartheta(x)$  peut être choisie telle que le sous système  $x$  est SES avec gain  $\gamma_x = \frac{1}{2}(2\hat{\gamma}_z)^{-1}$ . On conclut finalement avec le théorème 1.9.

## C.4 Démonstration du théorème 2.1

Avant de démontrer le théorème 2.1, nous introduisons un lemme technique.

**Lemme C.9** *Etant donnée une fonction  $\beta$  de classe  $KL$  satisfaisant que, pour chaque nombre réel strictement positif  $s$ , la fonction  $\beta(s, \cdot)$  est strictement décroissante. Pour chaque fonction continue  $\kappa_1 : (0, +\infty) \rightarrow [s_0, +\infty)$ , avec  $s_0$  un nombre réel strictement positif, et pour chaque fonction continue  $\kappa_2 : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  telle que :*

$$\kappa_2(s) \leq \beta(\kappa_1(s), 0) \quad \forall s > 0, \quad (\text{C.68})$$

*l'égalité :*

$$\beta(\kappa_1(s), \kappa(s)) = \kappa_2(s) \quad \forall s > 0 \quad (\text{C.69})$$

*entraîne une fonction  $\kappa$  bien définie sur  $(0, +\infty)$ , continue et positive.*

*Preuve :* Puisque pour chaque nombre réel strictement positif  $s$  la fonction  $\beta(s, \cdot)$  est continue et strictement décroissante, d'après (C.68), la fonction  $\kappa(s)$  est bien définie sur  $(0, +\infty)$ . Choisissons maintenant un nombre réel strictement positif arbitraire  $s$ . Soit  $\{s_n\}_{n \geq 0}$  une suite quelconque de nombres réels strictement positifs convergant vers  $s$ . On se propose de démontrer que  $\kappa(s_n)$  converge vers  $\kappa(s)$ . Remarquons d'abord que la suite  $\{\kappa(s_n)\}_{n \geq 0}$  est bornée. En effet, la continuité de  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  implique :

$$s_0 \leq \sup_{n \geq 0} \kappa_1(s_n) < +\infty, \quad \inf_{n \geq 0} \kappa_2(s_n) > 0. \quad (\text{C.70})$$

Puis, comme la fonction  $\beta$  est de classe  $KL$  et continue, nous avons :

$$0 \leq \kappa(s_n) \leq l^* < +\infty \quad \forall n \geq 0 \quad (\text{C.71})$$

où  $l^*$  est la minimale des valeurs de  $l$  telles que :

$$\beta(\sup_{n \geq 0} \kappa_1(s_n), l) \leq \inf_{n \geq 0} \kappa_2(s_n). \quad (\text{C.72})$$

Supposons que  $\kappa(s_n)$  ne converge pas vers  $\kappa(s)$  si  $n$  tend vers  $+\infty$ . Alors, il existe un nombre réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que pour chaque entier  $i$ , il existe un entier positif  $n_i$  plus grand que  $i$  et tel que :

$$|\kappa(s_{n_i}) - \kappa(s)| > \varepsilon. \quad (\text{C.73})$$

Puisque  $\{\kappa(s_n)\}_{n \geq 0}$  est une suite bornée, il existe une sous-suite convergente  $\{\kappa(s_{n_{ij}})\}_{j \geq 0}$  de  $\{\kappa(s_{n_i})\}_{i \geq 0}$ . Dénотons par  $\kappa^*(s)$  la limite. D'après la continuité des fonctions  $\beta$ ,  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  et (C.69), on en déduit que :

$$\beta(\kappa_1(s), \kappa^*(s)) = \kappa_2(s). \quad (\text{C.74})$$

Mais (C.73) implique :

$$|\kappa^*(s) - \kappa(s)| \geq \varepsilon. \quad (\text{C.75})$$

Ceci contredit (C.69) et complète la preuve du lemme.  $\square$

Le lemme technique suivant est démontré par Vidyasagar et Vannelli [79] et Sontag [70].

**Lemme C.10** Soit  $\dot{z} = h(z, u)$  un système ISS avec  $u$  comme entrée. Si la matrice  $\partial h / \partial z(0, 0)$  est strictement Hurwitz, alors il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et deux nombres réels strictement positifs  $\eta$  et  $k$  tels que :

$$\gamma(s) \leq ks \quad \forall s \in [0, \eta] \quad (\text{C.76})$$

et, pour chaque entrée  $u$  mesurable et essentiellement bornée, nous avons :

$$|z(t)| \leq \beta(|z(0)|, t) + \gamma(\|u_t\|) . \quad (\text{C.77})$$

*Preuve :* La différence principale avec [79], est qu'ici les conditions initiales ne sont pas nulles. Nous suivons les idées dans [79, Proof of Theorem 1] et [70, Proof of Lemma 6.1].

Puisque  $h$  est régulière, elle satisfait localement la condition de Lipschitz en  $x = 0$ ,  $u = 0$ , en d'autres termes, il existe des constantes positives  $L$  et  $\varepsilon$  telles que, pour tous les  $|z_i| \leq \varepsilon$  et  $|u_i| \leq \varepsilon$  ( $i = 1, 2$ ),

$$|h(z_1, u_1) - h(z_2, u_2)| \leq L(|z_1 - z_2| + |u_1 - u_2|) . \quad (\text{C.78})$$

A l'aide d'un théorème inverse de Lyapunov [20, Theorem 56.1], d'après nos hypothèses, il existe une fonction de Lyapunov  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  de classe  $C^1$ , et des constantes positives  $l_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) et  $\delta$  telles que :

$$\left. \begin{aligned} l_1^2 |z|^2 &\leq V(z) \leq l_2^2 |z|^2 \\ \dot{V}(z) &\leq -|z|^2 \\ |\nabla V(z)| &\leq l_3 |z| \end{aligned} \right\} \quad \forall |z| \leq \delta \quad (\text{C.79})$$

où  $\dot{V}$  signifie la dérivée de  $V$  le long des trajectoires de  $\dot{z} = h(z, 0)$ .

Considérons d'abord le cas où  $u(\cdot)$  est un contrôle mesurable et essentiellement borné satisfaisant  $\|u\| \leq \varepsilon$ . Maintenant, le long des trajectoires de  $\dot{z} = h(z, u(t))$  avec la condition initiale  $z(0)$  qui satisfait

$$|z(0)| \leq \xi_0 := (l_1/(2l_2)) \min\{\delta, \varepsilon\} , \quad (\text{C.80})$$

la dérivée temporelle de  $V$  s'écrit :

$$\dot{V}(t) = \nabla V(z(t))h(z(t), 0) + \nabla V(z(t))[h(z(t), u(t)) - h(z(t), 0)] \quad \forall t \geq 0 . \quad (\text{C.81})$$

Comme  $|z(0)| < \min\{\delta, \varepsilon\}$ , il existe un instant  $T > 0$  tel que :

$$|z(t)| \leq \min\{\delta, \varepsilon\} \quad \forall t \in [0, T] .$$

Vu (C.78), (C.79) et (C.81), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -|z(t)|^2 + l_3 L |z(t)| \|u_t\| \\ &\leq -\frac{1}{2l_2^2} V(z(t)) + \frac{l_3^2 L^2}{2} \|u_t\|^2 \quad \forall t \in [0, T] . \end{aligned} \quad (\text{C.82})$$

(C.82) donne :

$$V(z(t)) \leq e^{-t/(2l_2^2)} V(z(0)) + \frac{l_2^2 l_3^2 L^2}{2} \|u_t\|^2 \quad \forall t \in [0, T] . \quad (\text{C.83})$$

Avec (C.79), (C.83) implique :

$$|z(t)| \leq \frac{l_2}{l_1} e^{-t/(4l_2^2)} |z(0)| + \frac{l_2 l_3 L}{l_1} \|u_t\| \quad \forall t \in [0, T] . \quad (\text{C.84})$$

Nous voyons donc avec (C.80) que nécessairement  $T = +\infty$  si :

$$\frac{1}{2} \min\{\delta, \varepsilon\} + \frac{l_2 l_3 L}{l_1} \|u_t\| < \min\{\delta, \varepsilon\}, \quad \forall t \geq 0$$

et de plus,

$$|z(0)| \leq \xi_0, \quad \|u_t\| < \min\left\{\varepsilon, \frac{l_1}{2l_2 l_3 L} \min\{\delta, \varepsilon\}\right\} := \tilde{\varepsilon}$$

impliquent :

$$|z(t)| \leq \frac{l_2}{l_1} e^{-t/(4l_2^2)} |z(0)| + \frac{l_2 l_3 L}{l_1} \|u_t\|. \quad (\text{C.85})$$

Nous sommes maintenant prêts à construire les fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  telles que (C.76) et (C.77) sont satisfaites. Comme  $\dot{z} = h(z, u)$  est ISS, il existe une fonction  $\beta_0$  de classe  $KL$  et une fonction  $\gamma_0$  de classe  $K$  telles que :

$$|z(t)| \leq \beta_0(|z(0)|, t) + \gamma_0(\|u_t\|). \quad (\text{C.86})$$

Dû au Lemme C.3, nous pouvons supposer que  $\beta_0$  est continue et que, pour chaque nombre réel strictement positif  $s$ , la fonction  $\beta_0(s, \cdot)$  est strictement décroissante. Sans nuire à la généralité, on suppose que  $\gamma_0$  est de classe  $K_\infty$ .

Définissons  $\varepsilon^* > 0$  par :

$$\varepsilon^* := \sup\{\xi \geq 0 \mid \xi \leq \tilde{\varepsilon}/2, \gamma_0(\xi) \leq \xi_0/2\} \quad (\text{C.87})$$

et  $t^*(s)$  par :  $t^*(s) = 0$  si  $\beta_0(s, 0) \leq \xi_0/2$ ;  $\beta_0(s, t^*(s)) = \xi_0/2$  si  $\beta_0(s, 0) > \xi_0/2$ .

D'après le Lemme C.9, avec les propriétés de  $\beta_0$ , nous démontrons que  $t^*(s)$  est une fonction continue, croissante sur l'intervalle  $[0, +\infty)$ . D'après les définitions de  $t^*$  et de  $\varepsilon^*$ , lorsque  $|z(0)| \geq \xi_0$  et  $\|u\| \leq \varepsilon^*$ , (C.86) entraîne :

$$|z(t^*(|z(0)|))| \leq \xi_0, \quad \gamma_0(\|u_t\|) \leq \beta_0(|z(0)|, t) \quad \forall 0 \leq t \leq t^*.$$

En appliquant (C.85) avec le nouvel instant de départ  $t^*$ , nous obtenons :

$$|z(t)| \leq \frac{l_2 \xi_0}{l_1} e^{-t/(4l_2^2)} e^{t^*(|z(0)|)/(4l_2^2)} + \frac{l_2 l_3 L}{l_1} \|u_t\| \quad \forall t \geq t^*. \quad (\text{C.88})$$

Donc, dans le cas où  $|z(0)| \geq \xi_0$  et  $\|u\| \leq \varepsilon^*$ , nous avons, pour tous les  $t \geq 0$ ,

$$|z(t)| \leq 2\beta_0(|z(0)|, t) + \frac{l_2 \xi_0}{l_1} e^{-t/(4l_2^2)} e^{t^*(|z(0)|)/(4l_2^2)} + \frac{l_2 l_3 L}{l_1} \|u_t\|. \quad (\text{C.89})$$

Définissons  $\beta_1$  par :

$$\beta_1(s, t) := \frac{l_2}{l_1} e^{-t/(4l_2^2)} s + 2\beta_0(s, t) + \frac{l_2 \xi_0}{l_1} e^{-t/(4l_2^2)} e^{t^*(s)/(4l_2^2)}, \quad \forall s \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (\text{C.90})$$

Si  $t^*(s)$  était strictement croissante,  $\beta_1$  serait de classe  $KL$ . Par contre, la fonction  $\beta$  suivante est de classe  $KL$  :

$$\beta(s, t) := \beta_0(s, t) + \beta_1(s, t) \quad \forall s \geq 0, \forall t \geq 0. \quad (\text{C.91})$$

Définissons la fonction  $\gamma$  par :

$$\gamma(s) := \begin{cases} \frac{l_2 l_3 L}{l_1} s + \gamma_0(\varepsilon^*) \frac{s}{\varepsilon^*} & \text{si } s \in [0, \varepsilon^*] \\ \frac{l_2 l_3 L}{l_1} s + \gamma_0(s) & \text{si } s \in (\varepsilon^*, +\infty). \end{cases} \quad (\text{C.92})$$

Comme il peut être directement vérifié,  $\gamma$  définie dans (C.92) est de classe  $K$  et satisfait (C.76). Pour conclure, il suffit de démontrer que ces fonctions  $\beta$  et  $\gamma$  vérifient (C.77). En effet, considérons

- le cas où  $|z(0)| \leq \xi_0$  et  $\|u\| < \varepsilon^*$ . Comme  $\varepsilon^* < \tilde{\varepsilon}$ , d'après (C.91) et (C.92), (C.85) entraîne directement (C.77).
- le cas où  $|z(0)| \geq \xi_0$  et  $\|u\| < \varepsilon^*$ . (C.89) donne (C.77).
- le cas où  $\|u\| \geq \varepsilon^*$ . Selon les définitions de  $\beta$  et  $\gamma$ ,  $\beta(s, t) \geq \beta_0(s, t)$  et  $\gamma(s) \geq \gamma_0(s)$  pour tout  $(s, t)$  dans  $\mathbb{R}_+^2$ . Donc (C.86) implique immédiatement (C.77).

□

Preuve du théorème 2.1 :

Considérons la fonction :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2. \quad (\text{C.93})$$

Sa dérivée de Lie le long du champ de vecteurs donné par (2.12) est :

$$\dot{V} = xg(z, x)u + xf(z, x). \quad (\text{C.94})$$

Puisque  $f(x, z)$  est une fonction régulière, quels que soient les nombres réels strictement positifs  $a$  et  $\varepsilon$ , nous pouvons trouver trois fonctions positives et régulières  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ , qui sont définies sur  $\mathbb{R}$  et strictement croissantes sur l'intervalle  $[0, +\infty)$ , telles qu'avec (B.1) et (2.16), nous avons :

$$\begin{aligned} |x| |f(z, x)| &\leq |x| |f(z, x) - f(z, 0)| + |x| |f(z, 0)|, \\ &\leq x^2 \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z, \lambda x) \right| d\lambda + |x| \gamma_f(|z|), \\ &\leq x^2 (\alpha_1(x) + \alpha_2(|z|)) + |x| \gamma_f(|z|), \\ &\leq x^2 \left( \alpha_1(x) + a + \frac{1}{2\varepsilon}(1 + x^2) \right) + \frac{\varepsilon}{2} \gamma_f(|z|)^2 (1 + \alpha_3(|z|)). \end{aligned} \quad (\text{C.95})$$

En effet, les fonctions  $\gamma_f$  et  $\alpha_2$  étant régulières, positives et strictement croissantes, pour chaque  $a > 0$ , il existe une fonction régulière, positive et strictement croissante  $\alpha_3$  satisfaisant (voir Lemme C.1) :

$$\frac{\max \{ \alpha_2(s) - a, 0 \}^2}{\gamma_f(s)^2} \leq \alpha_3(s) \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{C.96})$$

Alors, soit  $\kappa$  la fonction définie par :

$$\kappa(s) := \delta s^2 + \varepsilon [\gamma_f(s)^2 (1 + \alpha_3(s)) - \gamma_f(0)^2 (1 + \alpha_3(0))] . \quad (\text{C.97})$$

Elle est de classe  $K_\infty$ . Aussi, soit  $\gamma_z$  la fonction de classe  $K$  donnée par la propriété ISpS du sous système  $z$  dans (2.12) et  $d_3$  un nombre réel strictement positif. En appliquant le Lemme C.5 avec :

$$\gamma(x) = \kappa \circ 2\gamma_z(2x) \quad , \quad \lambda = d_3 , \quad (\text{C.98})$$

nous obtenons une fonction régulière  $\gamma_0$  de classe  $K_\infty$  satisfaisant :

$$\kappa \circ 2\gamma_z(2s) \leq \gamma_0(s + d_3) \quad \forall s \in \mathbb{R}_+. \quad (\text{C.99})$$

Notons que, la fonction  $\alpha_3$  étant régulière, si  $\gamma_z$  satisfait (2.17), l'inégalité (C.99) est satisfaite avec  $d_3$  égal à 0. Ayant obtenu  $\gamma_0$ , on peut définir la loi de commande  $\vartheta(x)$  comme :

$$\vartheta(x) = \frac{1}{\delta} \left[ -x \left( \alpha_1(x) + a + \frac{1}{2\varepsilon}(1 + x^2) + 1 + \frac{\delta}{2} \right) - \frac{u_1(x)}{x} \right] \quad (\text{C.100})$$

où  $u_1$  est la fonction paire donnée par :

$$u_1(x) = u_1(-x) = \gamma_0(|x|) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (\text{C.101})$$

Remarquons que :

$$u_1(x) = \frac{1}{2}x^2 \quad \forall x \in [-\eta_1, \eta_1] \quad (\text{C.102})$$

où  $\eta_1$  est un nombre réel strictement positif procuré par le Lemme C.5. Puis, car  $g$  est bornée inférieurement par le nombre réel strictement positif  $\delta$ , en substituant  $u$  dans (C.94) par :

$$u = \vartheta(x) + v, \quad (\text{C.103})$$

nous obtenons, avec (C.95),

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -x^2 - \frac{g(z, x)}{\delta} u_1(x) + \frac{\varepsilon}{2} \gamma_f(|z|)^2 (1 + \alpha_3(|z|)) + g(z, x) \left( xv - \frac{1}{2} x^2 \right), \\ &\leq -x^2 - \frac{1}{2} [\gamma_0(|x|) - \varepsilon (\gamma_f(|z|)^2 (1 + \alpha_3(|z|)) - \gamma_f(0)^2 (1 + \alpha_3(0)))] \\ &\quad - \frac{1}{2} [\gamma_0(|x|) - \delta v^2] \frac{g(z, x)}{\delta} + \frac{\varepsilon}{2} \gamma_f(0)^2 (1 + \alpha_3(0)). \end{aligned} \quad (\text{C.104})$$

On en déduit, avec l'algorithme de Sontag relatif à ISS, que le sous système  $x$  de (2.12) est ISpS avec  $(z, v)$  comme entrée et un triplet de  $(\beta_x, \gamma_x, d_x)$ , satisfaisant (1.44), définies comme :

$$\beta_x(s, t) := s \exp(-2t) \quad (\text{C.105})$$

$$\gamma_x(s) := \gamma_0^{-1} \circ \kappa(s) \quad (\text{C.106})$$

$$d_x := \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \gamma_f(0) \sqrt{1 + \alpha_3(0)}. \quad (\text{C.107})$$

Avec (C.101), (C.99), (C.106) et (C.97), nous concluons que :

$$\gamma_x \circ 2\gamma_z(s) \leq \frac{1}{2}s + d_3 \quad \forall s \geq 0 \quad (\text{C.108})$$

où  $d_3$  est nul quand (2.17) est satisfaite. Il résulte que les deux premiers points du théorème sont démontrés au moyen du Théorème 1.10.

Il reste à démontrer le dernier point. Observons que, quand nous considérons  $x$  comme la sortie du système (2.12), (2.12) est hyperboliquement à déphasage minimal avec degré relatif 1 (voir [8]). D'après [44, Theorem 24.I] sur les conditions pour la stabilité procurée par l'approximation d'ordre 1 et la technique du lieu de pôles dans [16], il existe un nombre réel strictement positif  $\varepsilon^*$  tel que pour tous les  $\varepsilon$  dans  $(0, \varepsilon^*]$ , le contrôleur d'état partiel  $\vartheta(x)$ , définie par (C.100), rend la solution nulle de (2.12) bouclé GAS et LES. A l'aide du Lemme C.10, le dernier point est démontré.

## C.5 Démonstration de la proposition 2.4

Soit  $u(\cdot)$  une fonction arbitraire de  $[0, +\infty)$  dans  $\mathbb{R}$  qui est mesurable et essentiellement bornée. Pour chaque condition initiale  $(x(0), z(0))$ , dénotons par  $(x(t), z(t))$  la solution correspondante du système (2.18)-(2.19) définie sur l'intervalle maximal à droite  $[0, T)$  avec  $0 < T \leq +\infty$ . Soient  $(\beta_x, \gamma_x, d_x)$  (resp.  $(\beta_z, \gamma_z, d_z)$ ) trois fonctions associées données par la propriété du sous système  $x$  (2.18) (resp. du sous système  $z$  (2.19)). Choisissons chaque  $T'$  dans  $[0, T)$ .

D'après la propriété d'ISpS, (2.18) avec  $(z, u)$  comme entrée et (2.19) avec  $u$  comme entrée entraînent que pour chaque  $0 \leq s \leq t \leq T'$ , et utilisant le fait que ces systèmes sont stationnaires :

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(s)|, t-s) + \gamma_x(\|z_{[s,t]}, u_{[s,t]}\|) + d_x \quad (\text{C.109})$$

$$|z(t)| \leq \beta_z(|z(s)|, t-s) + \gamma_z(\|u_{[s,t]}\|) + d_z \quad (\text{C.110})$$

avec  $u_{[s,t]}$  défini en Appendice A. En particulier, (C.109) et (C.110) sont satisfaites pour  $s = 0$ . Comme  $\beta_z$  est de classe  $KL$ , nous avons, pour tous les  $0 \leq t \leq T'$ ,

$$|z_{T'}(t)| = |z(t)| \leq \beta_z(|z(0)|, 0) + \gamma_z(\|u\|) + d_z := \delta. \quad (\text{C.111})$$

Alors, en substituant (C.111) dans (C.109), nous obtenons immédiatement que pour tous les  $0 \leq t \leq T'$ ,

$$|x(t)| \leq \beta_x(|x(0)|, 0) + \gamma_x(\|u\| + \delta) + d_x. \quad (\text{C.112})$$

Les bornes obtenues pour  $|x(t)|$  et  $|z(t)|$  dans (C.111) et (C.112) ne dépendent pas de  $T'$ . Aussi, puisque  $T'$  est arbitraire,  $|x(t)|$  et  $|z(t)|$  sont bornés sur leur intervalle maximal à droite  $[0, T)$ . On en déduit par contradiction que  $T = +\infty$ .

Maintenant (C.109) et (C.110) sont satisfaites pour tous les  $0 \leq s \leq t < +\infty$ . Nous allons montrer qu'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $KL$ , une fonction  $\gamma$  de classe  $K$  et une constante positive  $d$  telles que, pour tous les  $t \geq 0$ ,

$$\left| \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \right| \leq \beta \left( \left| \begin{pmatrix} x(0) \\ z(0) \end{pmatrix} \right|, t \right) + \gamma(\|u_t\|) + d. \quad (\text{C.113})$$

En utilisant (C.109) avec  $(s, t) = (t/2, t)$  et (C.110) avec  $(s, t) = (0, \tau)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq \beta_x(|x(t/2)|, t/2) + d_x \\ &\quad + \gamma_x \left( \sup_{\tau \in [t/2, t]} \{ \beta_z(|z(0)|, \tau) + \gamma_z(\|u_\tau\|) + d_z + \|u_\tau\| \} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.114})$$

Utilisant l'inégalité (B.3) avec  $\rho = 2\text{Id}$ , le troisième terme dans le membre droit de (C.114) est borné par :

$$\begin{aligned} &\gamma_x \left( \sup_{\tau \in [t/2, t]} \{ \beta_z(|z(0)|, \tau) + \gamma_z(\|u_\tau\|) + d_z + \|u_\tau\| \} \right) \\ &\leq \gamma_x(2\beta_z(|z(0)|, t/2)) + \gamma_x \circ 4(\gamma_z + \text{Id})(\|u_t\|) + \gamma_x(4d_z). \end{aligned} \quad (\text{C.115})$$

En appliquant (C.109) et (C.110) au premier terme du membre droit de (C.114), utilisant encore



une fois l'inégalité (B.3) avec  $\rho = 2\text{Id}$ , nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
& \beta_x(|x(t/2)|, t/2) \\
& \leq \beta_x(\beta_x(|x(0)|, t/2) + \gamma_x(\|(z_{t/2}, u_{t/2})\|) + d_x, t/2) \\
& \leq \beta_x(2\beta_x(|x(0)|, t/2), t/2) + \beta_x(4d_x, t/2) \\
& \quad + \beta_x(4\gamma_x(\beta_z(|z(0)|, 0) + \gamma_z(\|u_{t/2}\|) + d_z + \|u_{t/2}\|), t/2) \\
& \leq \beta_x(2\beta_x(|x(0)|, t/2), t/2) + \beta_x(8\gamma_x(2\beta_z(|z(0)|, 0)), t/2) \\
& \quad + \beta_x(16\gamma_x \circ 4(\gamma_z + \text{Id})(\|u_{t/2}\|), t/2) + \beta_x(4d_x, t/2) + \beta_x(16\gamma_x(4d_z), t/2) .
\end{aligned} \tag{C.116}$$

Vu (C.115), (C.116), (C.114) et (C.110), nous concluons que (C.113) est vérifiée avec  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $d$  définies ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\beta(s, t) &= \beta_x(2\beta_x(s, t/2), t/2) + \beta_x(8\gamma_x(2\beta_z(s, 0)), t/2) + \gamma_x(2\beta_z(s, t/2)) + \beta_z(s, t) , \\
\gamma(s) &= \gamma_x(4\gamma_z(s) + 4s) + \beta_x(16\gamma_x(4\gamma_z(s) + 4s), 0) + \gamma_z(s) , \\
d &= d_x + \gamma_x(4d_z) + \beta_x(4d_x, 0) + \beta_x(16\gamma_x(4d_z), 0) + d_z .
\end{aligned}$$

Le premier point de la Proposition 2.4 est donc démontré. En ce qui concerne le second point, nous remarquons que le linéarisé du système (2.18)-(2.19) avec  $u = 0$  est stable, i.e. que toutes les valeurs propres de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) & \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) \\ 0 & \frac{\partial g}{\partial z}(0, 0) \end{pmatrix}$$

se trouvent dans le demi-plan gauche ouvert des complexes.



## Annexe D

# Démonstrations liées au Chapitre 3

### D.1 Démonstration du corollaire 3.2

On donne ici une démonstration du corollaire 3.2 fondée sur une fonction de Lyapunov *globale*.

Puisque  $F$ ,  $H$  et  $u_n$  sont localement Lipschitz, pour chaque condition initiale  $X(0) \in \Omega$ , il existe une solution unique  $X(t)$  de (3.7)-(3.73) définie maximale à droite :  $[0, T) \rightarrow \Omega$ .

Pour étudier les propriétés de cette solution, introduisons une fonction  $I : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  par :

$$I(V) = \int_0^V \frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)} dv \quad (\text{D.1})$$

$I$  est bien définie. En effet, à partir des propriétés de  $\Psi$  et le point 1 du Lemme 3.1, la fonction  $\Psi(x)/x$  peut être définie par extension continue comme une fonction continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $\Upsilon$  étant aussi continue,  $\frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)}$  est continue de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{R}_+$ . De plus,  $\Psi$  étant strictement croissante et  $\Upsilon$  satisfaisant (3.15), pour chaque nombre réel positif  $i$ , il existe un nombre réel positif  $v$  tel que :

$$I(V) \leq i \quad \implies \quad V \leq v. \quad (\text{D.2})$$

Soit  $\mathcal{V}(x, r)$  une fonction définie par :

$$\mathcal{V}(x, r) = I(V(x, p^*)) + \frac{\varepsilon}{2} r^2 \quad (\text{D.3})$$

avec  $\varepsilon$  un nombre réel strictement positif qui sera précisé par la suite. Les arguments précédents montrent que  $\mathcal{V}$  est une fonction  $C^1$ , définie positive et propre de  $(V, r)$ . Dénotons par  $\omega$  les effets non-modélisés associés à la solution  $X(t)$  :

$$\omega = \dot{x} - a(x, u) - A(x, u) p^*. \quad (\text{D.4})$$

Avec (3.13) dans l'hypothèse S (3.12) et (3.18)-(3.19) dans l'hypothèse UEC( $\alpha, r_0, \Psi, \Upsilon$ ) (3.16) et selon les propriété (3.15) de  $\Upsilon$ , la dérivée de  $\mathcal{V}$  le long de cette solution satisfait :

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{\Psi(\Upsilon)^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial x} [a + A p^* + \omega] - \varepsilon r (\alpha r - \Psi(\Upsilon)) \quad (\text{D.5})$$

$$\leq - \left( 1 - \mu_1 - \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V)} \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + \mu_2 \frac{\Psi(\Upsilon)^2 \Psi^{-1}(\alpha r)}{\Upsilon} + \varepsilon r \Psi \quad (\text{D.6})$$

Remarquons que nous avons :

$$\Psi^{-1}(\alpha r) \leq \Upsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Psi(\Upsilon)^2 \Psi^{-1}(\alpha r)}{\Upsilon} \leq \Psi(\Upsilon)^2 \quad (\text{D.7})$$

et, comme  $\frac{\Psi(x)}{x}$  est non décroissante,

$$\Psi^{-1}(\alpha r) > \Upsilon \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Psi(\Upsilon)^2 \Psi^{-1}(\alpha r)}{\Upsilon} \leq \alpha r \Psi(\Upsilon) . \quad (\text{D.8})$$

On en déduit :

$$\dot{\mathcal{V}} \leq - \left( 1 - \mu_1 - \mu_2 - \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V)} \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + (\mu_2 \alpha + \varepsilon) r \Psi . \quad (\text{D.9})$$

Maintenant, nous allons démontrer l'existence de nombres positifs  $v^*$ ,  $r^*$  et  $\eta^* > 0$  tels qu'en chaque instant  $t$  où, soit  $V(t) \geq v^*$ , soit  $r(t) \geq r^*$  nous avons :

$$\dot{\mathcal{V}}(t) \leq -\frac{\eta^*}{2} (\Psi(\Upsilon(V(t)))^2 + r(t)^2) . \quad (\text{D.10})$$

En effet, par hypothèse, nous avons :

$$\ell := \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} < 1 - \mu_1 - 2\mu_2 \quad (\text{D.11})$$

Définissons  $\ell'$  par :

$$\ell' := \ell + \frac{1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \ell}{2} \in (\ell, 1 - \mu_1 - 2\mu_2) \quad (\text{D.12})$$

et choisissons :

$$\varepsilon := \alpha (2 - 2\mu_1 - 3\mu_2 - 2\ell') . \quad (\text{D.13})$$

Nous avons obtenu qu'en chaque instant  $t$  où  $\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V(t))} < \ell'$  nous avons :

$$\dot{\mathcal{V}}(t) \leq -\eta^* [\Psi(\Upsilon(V(t)))^2 + r(t)^2] \quad (\text{D.14})$$

où  $\eta^*$  est la racine la plus petite de :

$$\begin{aligned} \eta^2 - ((1 + 2\alpha^2)(1 - \mu_1 - \mu_2 - \ell') - \mu_2 \alpha^2) \eta \\ + \alpha^2 (1 - \mu_1 - \mu_2 - \ell') (1 - \mu_1 - 2\mu_2 - \ell') = 0 . \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

Cette racine est strictement positive d'après (3.78). Par ailleurs, à partir des définitions de  $\ell$  et  $\ell'$ , il existe un nombre réel positif  $v^*$  tel que :

$$\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} \geq \ell' \quad \Longrightarrow \quad v \leq v^* . \quad (\text{D.16})$$

Il en résulte que, à chaque instant  $t$  où  $\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V(t))} \geq \ell'$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(t) &\leq -(1 - \mu_1 - \mu_2 - \ell') \Psi(\Upsilon(V(t)))^2 - \varepsilon \alpha r(t)^2 \\ &\quad + (\mu_2 \alpha + \varepsilon) r(t) \Psi(\Upsilon(V(t))) + \left( \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V(t))} - \ell' \right) \Psi(\Upsilon(V(t)))^2 \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

$$\leq -\frac{\eta^*}{2} [\Psi(\Upsilon(V(t)))^2 + r(t)^2] + \frac{\eta^*}{2} (r^{*2} - r(t)^2) \quad (\text{D.18})$$

où, dû à la continuité de la fonction  $\frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)}$ , le nombre réel positif  $r^*$  est défini par :

$$r^{*2} := \frac{2\mathcal{D}(\Omega)}{\eta^*} \sup_{0 \leq v \leq v^*} \left\{ \frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)} \right\} . \quad (\text{D.19})$$

Supposons que  $T$  soit fini, alors :

$$X(t) \rightarrow \partial\Omega \quad \text{si} \quad t \rightarrow T . \quad (\text{D.20})$$

Mais comme  $\mathcal{V}(x, r)$  est propre,  $V$  satisfait le point 3 dans l'hypothèse S (3.12) et, d'après (D.10),  $\dot{\mathcal{V}}$  est strictement négative quand  $V$  ou  $r$  est large, il existe alors un ensemble compact  $K_x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$x(t) \in K_x \quad \forall t \in [0, T) . \quad (\text{D.21})$$

Avec l'hypothèse OE (3.10) et (D.20), on en déduit que la commande  $u(t) = u_n(x(t), p^*)$  est non bornée sur  $[0, T)$ . Mais ceci est impossible puisque  $u_n$  est continue et  $x(t)$  vérifie (D.21). Donc  $T = +\infty$  et, selon OE (3.10) , la solution  $X(t)$  est bornée.

Finalement, considérons le cas où  $D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0$ . On sait à partir des analyses précédentes que toutes les solutions avec  $X(0) \in \Omega$  sont bien définies et bornées sur  $[0, +\infty)$  donc notamment sur  $[0, T_0)$ . Si bien qu'on peut reproduire cette analyse mais avec le nouvel instant initial  $T_0$  et donc avec  $\mathcal{D}(\Omega)$  remplacée par 0. Dans ce cas  $v^*$  et  $r^*$  sont nuls. Donc pour chaque  $t \geq T_0$ , nous avons :

$$\dot{\mathcal{V}}(t) \leq -\eta^* (\Psi(\Upsilon(V(t))))^2 + r(t)^2 \quad (\text{D.22})$$

A partir de l'hypothèse R (3.9) et du lemme de Barbălat [60, p.211],  $\Psi(\Upsilon(V(x(t), p^*)))$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Selon les propriétés de  $\Psi$  et les points 2 et 3 de l'hypothèse S (3.12) , nous concluons :

$$D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0 \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mathcal{E} . \quad (\text{D.23})$$

## D.2 Démonstration de la proposition 3.1

Puisque les champs de vecteurs de (3.7)-(3.83) sont localement Lipschitz, pour chaque condition initiale  $\hat{p}(0) \in \overset{\circ}{\Pi}$  et  $X(0) \in \Omega$ , il existe une seule solution  $(X(t), \hat{p}(t))$  de (3.7)-(3.83) définie maximale à droite :  $[0, T) \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}^p$ . Rappelons que, selon Praly et al. [64, lemma (105)], la fonction Proj possède les propriétés suivantes :

$$(p - p^*)^\top \text{Proj}(p, y) \leq (p - p^*)^\top y, \quad |\text{Proj}(p, y)| \leq |y| \quad (\text{D.24})$$

pour tous les  $(p, p^*, y)$  dans  $\mathbb{R}^l \times \overset{\circ}{\Pi} \times \mathbb{R}^l$ . Le long de cette solution, nous avons, avec (D.24) :

$$\dot{U} \leq - \left( 1 - \mu_1 - \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V)} \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + \mu_2 \frac{\Psi(\Upsilon)^2 \Psi^{-1}(\alpha r)}{\Upsilon} + \varepsilon r \Psi - \lambda (\hat{p} - p^*)^\top \dot{p}^*. \quad (\text{D.25})$$

Mais, dû à Proj,  $\hat{p}$  reste dans le compact  $\Pi$ . Puisque, par hypothèse, il en est de même pour  $p^*$  et que nous avons :

$$|\dot{p}^*| \leq \rho,$$

il existe un nombre réel positif  $k$ , dépendant seulement de  $\Pi$ , tel que :

$$\dot{U} \leq - \left( 1 - \mu_1 - \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon} - \frac{\lambda k \rho}{\Psi^2} \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + \mu_2 \frac{\Psi(\Upsilon)^2 \Psi^{-1}(\alpha r)}{\Upsilon} + \varepsilon r \Psi. \quad (\text{D.26})$$

Vue l'analogie avec (D.6), nous poursuivons comme dans la preuve de Proposition 3.2. Nous montrons l'existence de nombres réels positifs  $v^*$ ,  $r^*$  et  $\eta^* > 0$  tels qu'à chaque instant  $t$  où  $V(t) \geq v^*$  ou  $r(t) \geq r^*$  nous avons :

$$\dot{U}(t) \leq -\frac{\eta^*}{2} (\Psi(\Upsilon(V(t)))^2 + r(t)^2). \quad (\text{D.27})$$

Supposons alors que  $T$  soit fini. Puisque  $\hat{p}(t)$  reste dans l'ensemble compact  $\Pi$ , ceci implique :

$$X(t) \rightarrow \partial\Omega \quad \text{si} \quad t \rightarrow T. \quad (\text{D.28})$$

Mais puisque  $U(x, r, \hat{p})$  est propre,  $\hat{p}$  reste dans l'ensemble compact  $\Pi$ ,  $V$  satisfait le point 3 dans l'hypothèse S (3.12) et  $\dot{U}$  est strictement négative quand  $V$  ou  $r$  est large, il existe un ensemble compact  $K_x$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$x(t) \in K_x \quad \forall t \in [0, T). \quad (\text{D.29})$$

Avec l'hypothèse OE (3.10), (D.28) et la continuité de  $u_n$ , ceci est comme dans la preuve de la Proposition 3.2 en contradiction avec (D.28). Il en résulte que  $T = +\infty$  et que la solution  $X(t)$  est bornée. Finalement, observons que si  $\rho = 0$  et  $D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0$ , alors nous pouvons choisir  $v^* = r^* = 0$  pour  $t \geq T_0$ . Par conséquent,

$$\dot{U} \leq -\eta^* (\Psi^2 + r^2). \quad (\text{D.30})$$

A l'aide de l'hypothèse R (3.9) et le lemme de Barbălat [60, p.211], on en déduit que la fonction  $\Psi(\Upsilon(V(x(t))))$  tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . A partir des propriétés de  $\Psi$  et les points 2 et 3 de l'hypothèse S (3.12), nous concluons :

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad D(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq T_0 \quad \implies \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \mathcal{E}. \quad (\text{D.31})$$

Remarquons que si  $\mathcal{D}(\Omega) = \rho = 0$ , le fait que  $\Pi$  soit compact n'est pas nécessaire puisque dans ce cas (D.27) implique la bornitude de  $U$  et donc de  $\hat{p} - p^*$ .

### D.3 Démonstration de la proposition 3.2

Comme les champs de vecteurs de (3.7)-(3.92) sont localement Lipschitz, pour chaque condition initiale  $\hat{p}(0) \in \overset{\circ}{\Pi}$ ,  $r(0) \geq 0$  et  $X(0) \in \Omega$ , il existe une seule solution  $(X(t), \hat{p}(t), r(t))$  de (3.7)-(3.92) définie maximale à droite :  $[0, T) \rightarrow \Omega \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$ . Le long de cette solution, nous avons, avec (D.24) et  $U$  définie dans (3.90) :

$$\dot{U} \leq \frac{1}{\Delta} \left[ - \left( 1 - \mu_1 - \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V)} \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + \mu_2 \frac{\Psi(\Upsilon)^2 \Psi^{-1}(\alpha r)}{\Upsilon} + \varepsilon r \Psi + \frac{\Psi^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial p} \dot{\hat{p}} \right]$$

où :

$$\Delta := 1 + \int_0^V \frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)} dv + \frac{\varepsilon}{2} r^2. \quad (\text{D.32})$$

Pour aller plus loin, nous observons que,  $\frac{(1 + \int_0^v \Upsilon(t) dt)^k}{1 + \int_0^v \frac{\Psi(\Upsilon(t))^2}{\Upsilon(t)} dt}$  étant une fonction non décroissante, nous avons en prenant sa dérivée logarithmique,

$$\frac{\Psi(\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)^2} \frac{1 + \int_0^v \Upsilon(t) dt}{1 + \int_0^v \frac{\Psi(\Upsilon(t))^2}{\Upsilon(t)} dt} \leq k. \quad (\text{D.33})$$

Puis avec (D.24), (3.92) et (3.93), nous avons :

$$\left| \frac{\Psi^2}{\Upsilon} \frac{\partial V}{\partial p} \dot{\hat{p}} \right| \leq \frac{1}{\lambda \Delta} \frac{\Psi^4}{\Upsilon^2} \left| \frac{\partial V}{\partial p}(x, \hat{p}) \right| \cdot \left| A(x, u_n(x, \hat{p}))^\top \frac{\partial V}{\partial x}(x, \hat{p})^\top \right| \quad (\text{D.34})$$

$$\leq \Psi^2 \frac{dk}{\lambda}. \quad (\text{D.35})$$

En retournant à (D.32) et en poursuivant les mêmes étapes que celles suivant (D.6), nous obtenons :

$$\dot{U} \leq \frac{1}{\Delta} \left\{ - \left( 1 - \mu_1 - \mu_2 - \frac{dk}{\lambda} - \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon} \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + (\varepsilon + \alpha \mu_2) r \Psi \right\}. \quad (\text{D.36})$$

Définissons :

$$\ell := \limsup_{v \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)}, \quad \ell' := \ell + \frac{1 - \mu_1 - \mu_2 - dk/\lambda - \ell}{2} > \ell \quad (\text{D.37})$$

A chaque instant  $t$  où  $\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V(t))} < \ell'$ , nous avons :

$$\dot{U} \leq \frac{1}{\Delta} \left\{ - \frac{1}{2} \left( 1 - \mu_1 - \mu_2 - \frac{dk}{\lambda} - \ell \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 + (\varepsilon + \alpha \mu_2) r \Psi \right\} \quad (\text{D.38})$$

$$\leq - \frac{\eta^*}{\Delta} (\Psi^2 + r^2) \quad (\text{D.39})$$

où  $\eta^*$  est la racine la plus petite de :

$$4\eta^2 - 2(1 - \mu_1 - \mu_2 - dk/\lambda - \ell + 2\varepsilon\alpha)\eta + \{2\alpha\varepsilon(1 - \mu_1 - \mu_2 - dk/\lambda - \ell) - (\varepsilon + \alpha\mu_2)^2\} = 0. \quad (\text{D.40})$$

Elle est strictement positive dû à (3.95). Par ailleurs, il existe un nombre réel positif  $v^*$  tel que :

$$\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(v)} \geq \ell' \quad \implies \quad v \leq v^* . \quad (\text{D.41})$$

Finalement, à chaque instant  $t$  où  $\frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V(t))} \geq \ell'$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{U} &\leq \frac{1}{\Delta} \left\{ -\frac{1}{2} \left( 1 - \mu_1 - \mu_2 - \frac{dk}{\lambda} - \ell \right) \Psi^2 - \varepsilon \alpha r^2 \right. \\ &\quad \left. + (\varepsilon + \alpha \mu_2) r \Psi + \left( \frac{\mathcal{D}(\Omega)}{\Upsilon(V(t))} - \ell' \right) \Psi^2 \right\} \\ &\leq \frac{1}{\Delta} \left\{ -\eta^*(\Psi^2 + r^2) + \sup_{0 \leq v \leq v^*} \frac{\mathcal{D}(\Omega) \Psi (\Upsilon(v))^2}{\Upsilon(v)} \right\} . \end{aligned} \quad (\text{D.42})$$

La preuve se complète avec les mêmes arguments que dans la preuve de la Proposition 3.1.



# Bibliographie

- [1] D. Aeyels, Stabilization of a class of nonlinear systems by a smooth feedback control, *Systems Control Lett.*, **5** (1985), 289-294.
- [2] D. Aeyels, Remarks on the stabilizability of nonlinear systems by smooth feedback, in *Perspectives in Control Theory*, Eds. Jakubczyk B., Malanowski K. and Respondek W., Birkhäuser 1990, pp. 1-11.
- [3] A. Andreini, A. Bacciotti and G. Stefani, Global stabilizability of homogeneous vector fields of odd degree, *Systems Control Lett.*, **10** (1988), 251-256.
- [4] A. Bacciotti, *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems*, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences - Vol. 8, World Scientific, 1992.
- [5] B. R. Barmish, M. Corless and G. Leitmann, A new class of stabilizing controllers for uncertain dynamical systems, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, **21** (1983), 246-255.
- [6] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, 1975.
- [7] C. I. Byrnes and A. Isidori, New results and examples in nonlinear feedback stabilization, *Systems & Control Letters*, **12** (1989) 437-442.
- [8] C. I. Byrnes and A. Isidori, Asymptotic stabilization of minimum phase nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, **36** (1991) 1122-1137.
- [9] G. Campion and G. Bastin, Lyapunov design of an adaptive external linearization feedback control for manipulators, in : A. Bensoussan and J. Lions, Ed., *Analysis and optimization of systems*. Springer Verlag, 1986, pp. 172-187.
- [10] G. Campion and G. Bastin, Analysis of an adaptive controller for manipulators: Robustness versus flexibility. *Syst. & Control Lett.*, **12** (1989) 251-258.
- [11] J. Carr, *Applications of Center Manifold Theory*, Springer Verlag, New York, 1981.
- [12] Y. H. Chen and G. Leitmann, Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions, *Int. J. Control*, **45** (1987), 1527-1542.
- [13] J.-M. Coron and L. Praly, Adding an integrator for the stabilization problem, *Systems Control Lett.*, **17** (1991), 89-104.
- [14] W. Dayawansa and C. Martin, A remark on a theorem of Andreini, Bacciotti, Stefani, *Systems Control Lett.*, **13** (1989), 363-364.

- 
- [15] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback Systems: Input-Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.
  - [16] W. Evans, *Control System Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1953.
  - [17] N. Fenichel, Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations, *J. Diff. Eqs.* **31**, pp. 53-98, 1979.
  - [18] R. A. Freeman and P. V. Kokotović, Design and comparison of globally stabilizing controllers for an uncertain nonlinear system, in *Systems, Models and Feedback: Theory and Applications*, A. Isidori and T.J. Tarn, Eds., pp. 249-264, Birkhauser, 1992.
  - [19] R. A. Freeman and P. V. Kokotović, A new Lyapunov function for the backstepping design of “softer” robust nonlinear control laws, to appear in *Automatica*; also in *IFAC NOLCOS'92 Symposium*, pp. 307-312, Bordeaux, June 1992.
  - [20] W. Hahn, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
  - [21] J. K. Hale, *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience, New York, 1980.
  - [22] G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, 2nd. ed., Cambridge Mathematical Library, 1989.
  - [23] D. J. Hill, A generalization of the small-gain theorem for nonlinear feedback systems, *Automatica*, Vol. 27, No. 6, pp. 1047-1050, 1991,
  - [24] P. A. Ioannou, P. V. Kokotović, *Adaptive systems with reduced order models*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 47, Springer Verlag, 1983.
  - [25] P. A. Ioannou and K. Tsakalis, The class of unmodelled dynamics in robust adaptive control, *Proc. 1988 Amer. Contr. Conf.*, 1988, pp. 337-342.
  - [26] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 2nd Edition, 1989.
  - [27] Z. P. Jiang and L. Praly, Adaptive nonlinear stabilization and robust Lagrange stability, *1st European Control Conference*, July 1991, Grenoble, France.
  - [28] Z. P. Jiang and L. Praly, Iterative designs of adaptive controllers for systems with nonlinear integrators, *30th IEEE Conf. on Decision and Control*, December 1991, UK.
  - [29] Z. P. Jiang and L. Praly, Preliminary results about robust Lagrange stability in adaptive non-linear regulation, *Int. J. of Adap. Control & Signal Proces.*, Vol. 6, 285-307 (1992).
  - [30] Z. P. Jiang and L. Praly, Technical results for the study of robustness of Lagrange stability, *Systems & Control Letters*, Vol. 22, to appear.
  - [31] Z. P. Jiang, L. Praly and A. R. Teel, Propagating the input to state stability property through integrators and applications. Submitted for publication in *MCSS*, 1993.
  - [32] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović and R. Marino, Robustness of Adaptive Nonlinear Control under an Extended Matching Condition, *IFAC symposium on Nonlinear Syst. Design*, Capri, Italy, 1989.

- [33] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović and A. S. Morse, Adaptive output-feedback control of systems with output non linearities, in : *Foundations of Adaptive Control*, P. V. Kokotović, Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1991, pp. 495-525.
- [34] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović and A. S. Morse, Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems, *IEEE Trans. AC*, **36** (1991), 1241-1253.
- [35] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović and A. S. Morse, Adaptive nonlinear control with incomplete state information, *Int. J. of Adapt. Control & Signal proces.*, **6** (1992), 367-394.
- [36] I. Kanellakopoulos, P. V. Kokotović and A. S. Morse, A toolkit for nonlinear feedback design, *Systems & Control Letters*, **18** (1992), 83-92.
- [37] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [38] H. K. Khalil and A. Saberi, Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems using high-gain feedback, *IEEE Trans. AC*, **32** (1987) 1031-1035.
- [39] A. J. Krener and A. Isidori, Linearization by output injection and nonlinear observers, *Systems & Control Letters*, **3** (1983), 47-52.
- [40] P. V. Kokotović, H. K. Khalil and J. O'Reilly, *Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design*, New York: Academic, 1986.
- [41] P. V. Kokotović and H. J. Sussmann, A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems, *Syst. Contr. Letters*, **13** (1989) 125-134.
- [42] J. Kurzweil, On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion, *Ann. Math. Soc. Transl. Series 2*, **24** (1956) 19-77.
- [43] S. Lefschetz, *Differential Equations: Geometric Theory*, New York, 1961.
- [44] A. Liapounoff, *Problème général de la stabilité du mouvement*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, deuxième série, Tome IX, 1907, Traduit du Russe par M. Édouard Davaux.
- [45] Y. Lin, Lyapunov function techniques for stabilization, Ph.D. thesis, Rutgers University, 1992.
- [46] R. Lozano, B. Brogliato and I.D. Landau, Passivity and global stabilization of cascaded nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **37** (1992) 1386-1388.
- [47] I. M. Y. Mareels and D. J. Hill, Monotone stability of nonlinear feedback systems, *J. of Math. Systems, Estimation and Control*, Vol. 2, No. 3, 1992, pp. 275-291.
- [48] R. Marino and P. Tomei, Dynamic output feedback linearization and global stabilization, *Systems & Control Letters*, **17** (1991), 115-121.
- [49] R. Marino and P. Tomei, Robust output feedback stabilization of single input single output nonlinear systems, *Proc. 30th IEEE CDC*, pp. 2503-2508, December 1991, UK.
- [50] R. Marino and P. Tomei, Robust stabilization of feedback linearizable time-varying uncertain nonlinear systems, *Automatica*, Vol. 29, No. 1, pp. 181-189, 1993.

- [51] R. Marino and P. Tomei, Global adaptive output feedback control of nonlinear systems, Parts I, II, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **38** (1993) 17-48.
- [52] R. Marino and P. Tomei, Output feedback control with disturbance attenuation for a class of nonlinear systems, *ECC'93*, pp. 410-415, Groningen, 1993.
- [53] R. K. Miller and A. N. Michel, *Ordinary Differential Equations* (Academic Press, 1982).
- [54] K. Nam and A. Arapostathis, A model reference adaptive control scheme for pure-feedback systems, *IEEE Trans. AC*, **33** (1988) 803-811.
- [55] K. S. Narendra and A. M. Annaswamy, *Stable Adaptive Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1989.
- [56] P. C. Parks, Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems, *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, 11 No 3, pp 362-367, 1966.
- [57] J.-B. Pomet, Sur la commande adaptative des systèmes nonlinéaires, Thèse en Mathématiques et Automatique, Ecole des Mines de Paris, 1989.
- [58] J.-B. Pomet and L. Praly, A result on robust boundedness, *Systems Control Lett.*, **10** (1988), 83-92.
- [59] J.-B. Pomet and L. Praly, Adaptive non-linear stabilization: estimation from the Lyapunov equation, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, Vol. 37, No. 6, 1992, pp. 729-740.
- [60] V. M. Popov, *Hyperstability of control systems*. Springer Verlag, 1973.
- [61] L. Praly, Commande adaptative indirecte multivariable: stabilité et robustesse. *Colloque national du CNRS*. Belle-Ile. Septembre 1982.
- [62] L. Praly, Commande linéaire adaptative: solutions bornées et leurs propriétés, *Docteur en Mathématiques et Automatique*, Université de Paris IX, 1988.
- [63] L. Praly, Almost exact modelling assumption in adaptive linear control, *Int. J. Control*, **51** (1990) 643-688.
- [64] L. Praly, G. Bastin, J.-B. Pomet and Z. P. Jiang, Adaptive stabilization of nonlinear systems, in : *Foundations of Adap. Control*, P. V. Kokotović (ed.), Springer, 1991, pp. 347-433.
- [65] L. Praly, B. d'Andréa-Novel and J.-M. Coron, Lyapunov design of stabilizing controllers for cascaded systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36** (1991) 1177-1181.
- [66] L. Praly and Z. P. Jiang, Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics, *Systems & Control Letters* **21** (1993) 19-33.
- [67] J. S. Reed and P. A. Ioannou, Instability analysis and robust adaptive control of robotic manipulators, *IEEE Trans. Robotics Autom.*, 5 No 3, June 1989.
- [68] A. Saberi, P. V. Kokotović and H. J. Sussmann, Global stabilization of partially linear composite systems, *SIAM J. Contr. Optimiz.*, **28** (1990) 1491-1501.
- [69] S. Sastry and M. Bodson, *Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

- 
- [70] E. D. Sontag, Smooth stabilization implies coprime factorization, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **34** (1989), 435-443.
  - [71] E. D. Sontag, Further facts about input to state stabilization, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **35** (1990), 473-476.
  - [72] H. J. Sussmann and P. V. Kokotović, The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **36** (1991), 424-440.
  - [73] D. G. Taylor, P. V. Kokotović, R. Marino and I. Kanellakopoulos, Adaptive regulation of nonlinear systems with unmodeled dynamics, *I.E.E.E. Transactions on Automatic Control*, 34 No 4, April 1989.
  - [74] A. R. Teel and L. Praly, Tools for semi-global stabilization by partial state and output feedback. Submitted for publication in *SIAM J. of Control and Optimization*, Nov. 1992.
  - [75] A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva and A. G. Sveshnikov, *Differential Equations*, Springer, Berlin, 1980.
  - [76] J. Tsinias, Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization, *Math. Control Signals Systems*, **2** (1989), 343-357.
  - [77] M. Vidyasagar, *Nonlinear System Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1978.
  - [78] M. Vidyasagar, The graph metric for unstable plants and robustness estimates for feedback stability. *IEEE Trans. Automatic Control*, **29** (1984), 403-418.
  - [79] M. Vidyasagar and A. Vannelli, New relationships between input-output and Lyapunov stability, *IEEE Trans. Automatic Control*, **27** (1982), 481-483.